1.6. Спектър на сигналите

Както стана известно по-горе, в теорията на сигналите и системите се използват два класа математични представяния на сигналите в областта на времевата координатна област и в честотната област. Всеки от тях поотделно дава възможност за изчерпателно аналитично описание на свойствата на даден вид сигнал. В този смисъл двата класа представяния на сигналите са еквивалентни.

На фиг. 1.19 е изобразена една част от сигнала $S(t)$ с примерна продължителност $T=10^{-3}$, $S=1\ ms$ по оста, която се повтаря наляво и надясно по оста t, т.е. сигналът е периодичен с период T. На същата фигура и в същите мащаби са изобразени още четири функции $F_0(t)...F_3(t)$. Едната от тях $F_0(t)$ е константна величина, но може да се разглежда като хармонична функция с нулева честота $f_0=0$ ($с\ T_0\to\infty$), т.е. с безкрайно бавно изменение по оста t. Другите три функции са наистина хармонични (синусоиди).

Периодът T_1 на първата е равен на периода T на $S(t)$, т.е. честотата и е

$$f_1=1/T_1=1/10^{-3}=1\ kHz.$$

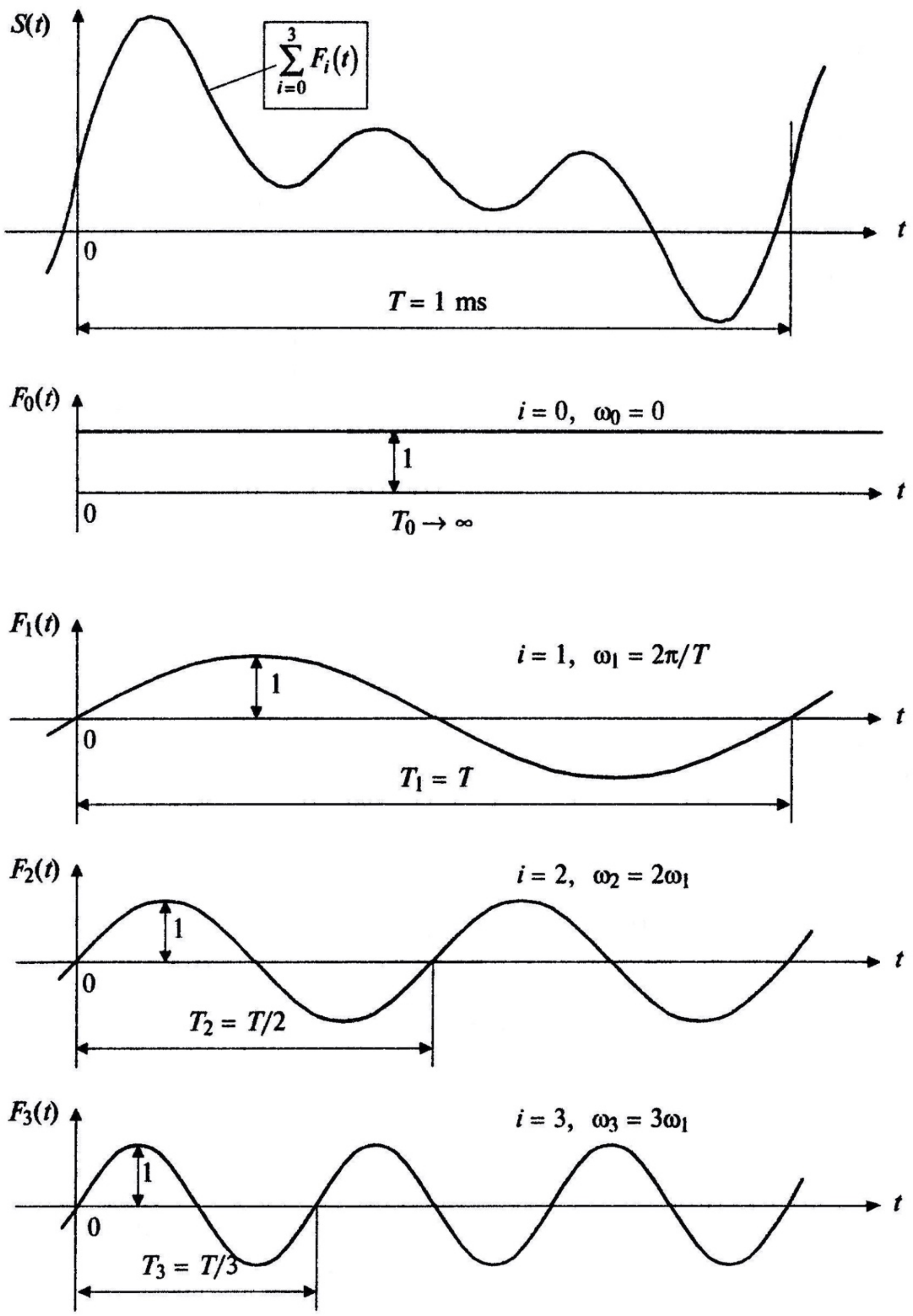
Периодите на втората и на третата синусоиди са съответно $T_2=T/2$ и $T_3=T/3$. Следователно имаме $f_2=1/T_2=1/(10^{-3}/2)=2kHz$ и $f_3=1/T_3=1/(10^{-3}/3)=3kHz$. За улеснение се приема, че всички амплитуди са равни на единица и всички начални фази-на нула.

Чрез непосредствена графична суперпозиция на четирите синусоиди с $f_0=0, f_1=1/T, f_2=2f_1, f_3=3f_1$ от фиг. 1.19 може да се установи, че сигналът $S(t)$ е сума от $F_0(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ и $F_3(t)$ и може да се напише

$$S(t)=\sum_{i=0}^{3} F_i(t), \tag{1.33}$$

откъдето следва

$$\begin{aligned} S(t)&=1+\sin 2\pi f_1 t+\sin 2\pi f_2 t+\sin 2\pi f_3 t= \\ &=1+\sin 2\pi f_1 t+\sin 2\pi (2f_1) t+\sin 2\pi (3f_1) t= \\ &=1+\sin \omega_1 t+\sin 2\omega_2 t+\sin 3\omega_1 t \end{aligned} \tag{1.34}$$



фиг.1.19

От (1.34) се вижда, че сигналът $S(t)$ в този пример може да се представи като сума от хармонични съставящи (в случая-четири) както следва:

- честотата на първата ($i=0$) е нулева (тя е *постоянна съставяща*);
- кръговата честота на втората ($i=1$) е ω_1 (тази съставяща се нарича *основна*, защото нейният период T_1 е равен на периода T на самия сигнал $S(t)$);

- кръговата честота на третата ($i=2$) и на четвъртата ($i=3$) са $2\omega_1$ и $3\omega_1$, т.е. те са *кратни* на кръговата честота на основната хармонична съставяща.

Като се има впредвид, че

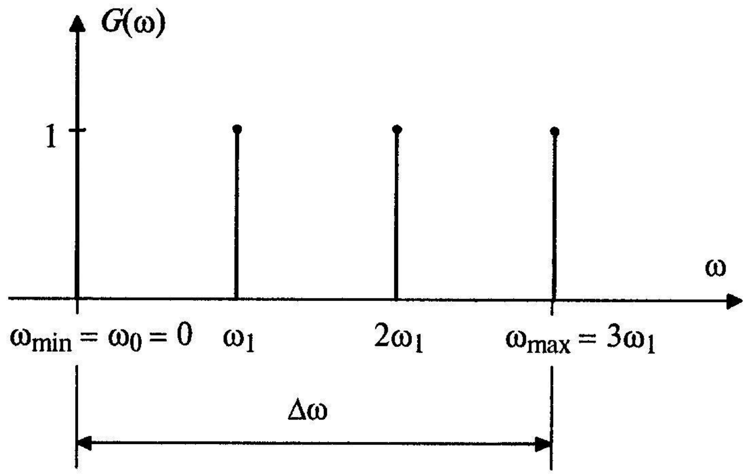
$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2.\pi.10^3\ rad/s$$

изразът (1.34) може да се запише и във вида

$$G(\omega) = \begin{cases} 1; & \omega = 0; \omega = \omega_1; \omega = 2\omega_1; \omega = 3\omega_1 \\ 0; & \omega \neq 0; \omega \neq \omega_1; \omega \neq 2\omega_1; \omega \neq 3\omega_1 \end{cases} \qquad (1.35)$$

Функцията $G(\omega)$ е търсеното представяне на разглеждания конкретен сигнал в честотната област. Тази функция се нарича *спектър на сигнала* $S(t)$.

Представянето на сигнала в честотната област може да се изобрази и графично. Ясно е, че в този случай спектърът (1.35) ще изглежда така, както е показано на фиг. 1.20 при допускането, че всички амплитуди на хармоничните са 1.



фиг. 1.20

Широчината на честотната лента (по скалата на кръговите честоти) е

$$\Delta\omega = \omega_{max} - \omega_{min} = 3\omega_1 - 0 = 3\omega_1 = 6.\pi.10^3\ rad/s\ .$$

Съответно за спектъра $G(t)$ се получава

$$\Delta f = f_{max} - f_{min} = f_3 - f_0 = 3f_1 - 0 = 3f_1 = 3\ kHz$$

В общия случай, когато представянето на сигнала в координатната област е $S(t, x, y, z)$, представянето му в честотната област (спектърът му) ще бъде функция от вида $G(\omega, u, v, w)$ или $G(f, f_x, f_y, f_z)$.

Очевидно е, че колкото по-бързи са измененията във времето на сигнала $S(t)$, толкова по-висока ще бъде честотата на най-високочестотната хармонична съставяща на неговия спектър $G(\omega)$ и толкова по-широка ще бъде заеманата от този спектър честотна лента $\Delta\omega$ по оста ω.

1.7. Основни сведения за системите

Думата *система* произлиза от гръцката дума "*systema*"-цяло, съставено от части. *Системата може да бъде представена като процес, при който резултатът е преобразуването и обработката на сигнали.*

За една техническа система е характерно следното:

а) тя е съвкупност от краен брой елементи, които са обединени в едно цяло;

б) между елементите съществуват определени отношения (връзки);

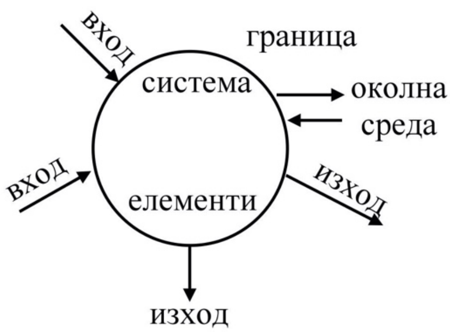
в) съвкупността от елементи е подчинена на определена цел; в нея съществува определен ред;

г) елементите имат относителен характер; те от своя страна могат да бъдат толкова сложни, че да са една подсистема, (субсистема) на разглежданата.

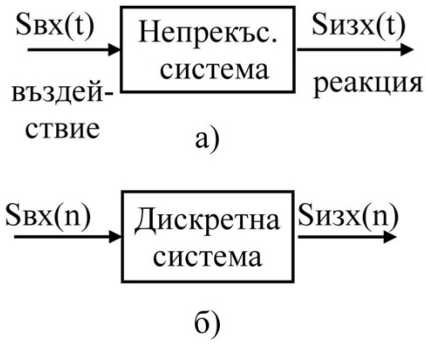
Например, може да се посочи единната автоматизирана система на съобщенията. Нейни елементи са подсистемите за кабелни, радиорелейни и спътникови връзки. Или пък дадена система получава записан звуков сигнал и го възпроизвежда. Ако тази система, чрез една подсистема за регулиране на тона може да променя своите параметри ще се променя качеството на тона на възпроизвеждания сигнал.

В широкия смисъл на думата системата означава определени правила, инструкции, установен ред и т.н. За пример могат да се посочат системата за социално осигуряване, съдебната система, политическата система, нервната система и др.

Обвиващата повърхнина, която отделя системата от околната среда се нарича граница на системата (фиг.1.21).



фиг. 1.21



фиг. 1.22

Елементите и връзките между тях определят структурата на системата.

Чрез *входовете* се осъществява отношението околна среда-система. Броят на входовете е неограничен.

Обратното отношение система-околна среда зависи от *изхода.* Има системи с един изход или много изходи.

В общия случай системата се характеризира с m входа и n изхода.

Системите, както и сигналите са *непрекъснати и дискретни.*

Непрекъснатата система (фиг.1.22а) преобразува непрекъснатия входен сигнал $S_{вх}(t)$ в непрекъснат изходен сигнал $S_{изх}(t)$. Входният сигнал се нарича *входно въздействие*, а изходният-*изходна реакция*. Двата сигнала са свързани чрез оператора Φ, който се дава чрез преобразуването

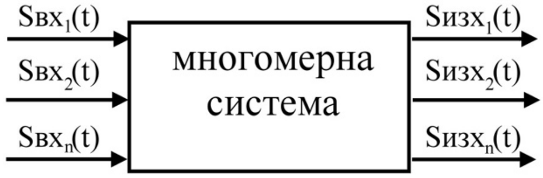
$$S_{изх}(t) = \Phi\left[S_{вх}(t)\right] \quad . \tag{1.36}$$

Преобразуването може да бъде линейно и нелинейно.

Дискретната система (фиг.1.22 б) преобразува дискретен входен сигнал в дискретен изходен сигнал

$$S_{изх}(n) = \Phi\left[S_{вх}(n)\right] \quad . \tag{1.37}$$

Многомерната система има m входа и n изхода (фиг.1.23).



фиг. 1.23

При нея въздействието и реакцията са многомерни вектори, на които съответстват $S_{вх1}(t)$, $S_{вх2}(t)$... $S_{вх\ m}(t)$ и $S_{изх1}(t)$, $S_{изх2}(t)$... $S_{изх\ n}(t)$. Преобразуването и тук се изразява аналогично на 1.36 по следния начин

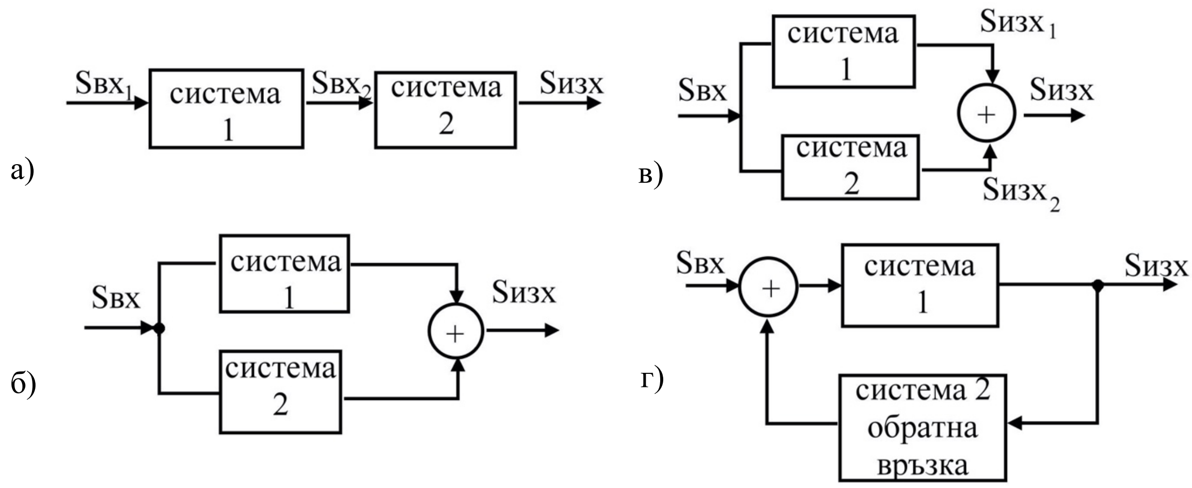
$$S_{изх}(t) = \Phi[S_{вх}(t)] \ .$$

Входният сигнал $S_{вх}(t)$ принадлежи на множество функции, за които е дефиниран операторът Φ. Например, не може една дискретна система да преобразува непрекъснати сигнали и обратно.

За пълното описание на системата е необходимо да се зададе нейното начално състояние $S_{изх}(t_0)$. Например, за една пасивна електрическа верига е от значение дали са заредени кондензаторите в нея, за един тригер-в кое от двете възможни състояния се намира и т.н.

Две системи могат да се свържат *последователно* (фиг. 1.24 а), *паралелно* (фиг. 1.24 б) или *смесено* (фиг. 1.24 в). Особен интерес представляват системите с *обратна връзка* (фиг. 1.24 г). Чрез обратната връзка се връща част от изходния сигнал към входа на системата и по този начин се влияе върху показателите на самата система.

На фиг. 1.3 е показана конфигурацията на една типична система за комуникационна връзка. В нея могат да се различат подсистеми, а в тях и съответните елементи.



фиг. 1.24

1.8. Свойства на системите

За техническите системи имат значение някои основни свойства, които са свързани с тяхното функциониране и най-вече с математическото им описание.

Каузалност (причинност). С това свойство се отличават системите, при които изходният сигнал във всеки момент зависи само от стойностите на входния сигнал в дадения момент и моментите преди него. Тези системи освен каузални се наричат още и *неизпреварващи*, тъй като входния сигнал не изпреварва входния. Например, електронния усилвател е неизпреварваща система, защото изходния сигнал зависи от входния и не може да го изпревари.

Системи с и без памет. Системата е без памет, ако сигналът на нейният изход в даден момент зависи само от входния сигнал в същия момент. Например, една верига съставена само от резистори е без памет; няма причина изходният сигнал да закъснее по отношение на входния.

За една непрекъсната система без памет важи зависимостта

$$S_{изх}(t) = k_1\, S_{вх}(t) \quad , \qquad (1.38)$$

където $к_1$ = const.

За дискретна система зависимостта (1.38) има следния вид

$$S_{изх}[n] = k_2\, S_{вх}[n]\,; \qquad к_1 = \text{const.} \qquad (1.39)$$

За системите с памет е характерно, че изходният сигнал в даден момент зависи от стойността на входния сигнал не само в този момент, но от стойности преди и след това. Количественото изразяване на това свойство за непрекъснати и съответно за дискретни системи е следното:

$$S_{изх}\left(t\right)=k_1\ S_{вх}\left(t-\tau\right) \tag{1.40}$$

$$S_{изх}\left[n\right]=k_2\ S_{вх}\left[n-m\right] \quad , \tag{1.41}$$

където τ и m са закъснения.

Други примери са:

$$u_C\ (t)=\frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} i\left(t\right)dt \tag{1.42}$$

$$S_{изх}\left[\ n\ \right]=\sum_{m\ =\ -\infty}^{n} S_{вх}\left[m\right] \tag{1.43}$$

В първия случай (1.42), изходният сигнал е напрежението на кондензатора, а входният-токът на зареждане.

Вторият случай (1.43), засяга натрупването (сумирането) на дискретни сигнали, т.е. дискретната стойност на изходния сигнал в момента n зависи от дискретната стойност на входния сигнал в този момент и от всички негови дискретни стойности в предшестващите моменти от време.

Устойчивост на системата. Една система е устойчива, ако при въздействие на малки сигнали, реакциите не са растящи. Това означава още, че ако входните сигнали са ограничени, изходните сигнали също са ограничени.

Устойчивостта се разглежда още и като свойство на системата да запазва равновесното си състояние, ако бъде изведена от него за кратко време.

Стабилност на параметрите на системата. Параметрите на системата изразяват количествено нейните свойства. Например, параметър на електронния усилвател е коефициентът на усилване. Стабилността на коефициента на усилване е свойството му да не се изменя във времето под влияние на външни фактори: захранващо напрежение, температура, товара, стареене на елементите и пр.

Линейност. Една система е линейна, ако за нея важи принципът на *суперпозицията*. Той се състои в следното. *Когато на входа на системата се въздейства със сума от входни сигнали, изходният сигнал е сума от реакциите на тези сигнали.* Математически това се изразява чрез условията:

$$\Phi\left[S_{вх1} + S_{вх2} + \ldots\right] = \Phi\left[S_{вх1}\right] + \Phi\left[S_{вх2}\right] + \ldots \qquad (1.44)$$

$$\Phi\left[a\, S_{вх}\right] = a\, \Phi\left[S_{вх}\right] \qquad (1.45)$$

Първото условие отразява свойството адитивност. Второто се разглежда като еднородност, мащабиране или хомогенизиране, т.е. умножението с константа се запазва и след преобразуване на сигнала.

Изразите (1.44) и (1.45) важат за непрекъснати и за дискретни сигнали. В първият случай $S_{вх} = S_{вх}(t)$, а във втория $S_{вх} = S_{вх}[n]$.

Линейните системи се характеризират и с това, че когато входния сигнал $S_{вх} = 0$, изходния сигнал също е равен на нула , т.е $S_{изх} = 0$.

Линейните системи се описват с линейни алгебрични, диференциални и диференчни уравнения. В реакцията се съдържат само честотните съставки, които се съдържат във въздействието.

Ако системата *не отговаря едновременно на условията за адитивност и еднородност, тя е нелинейна.*

Стационарност (инвариантност във времето). Това свойство се изразява в запазване на свойствата на системата във времето. Във връзка с това се фиксира моментът на отчитане на времето t_0 . При преместване на входния сигнал се предизвиква съответно преместване на изходния сигнал или

$$\Phi\left[S_{вх}(t \pm t_0)\right] = S_{изх}(t \pm t_0) \quad . \qquad (1.46)$$

Ако не е спазено условието (1.46), системата е *нестационарна*.

Системите, който са *линейни и стационарни* се наричат още *линейни инвариантни във времето (ЛИВ) системи*.

За *дискретни системи* (1.46) добива вида

$$\Phi\left[S_{вх}(n \pm n_0)\right] = S_{изх}(n \pm n_0).$$