

2.4. Количествено определяне на информацията

Както вече се спомена информацията намалява неопределеността в знанията ни за даден обект. Тъй като вероятността за появата на дадено събитие е мярка за неговата неопределеност, то вероятностния подход се е наложил при оценката на количеството информация.

От значение са *априорната вероятност* P_1 (вероятността за появата на събитието до провеждането на опита, преди приемането на съобщението) и *апостериорната вероятност* P_2 (след опита, след приемането на съобщението).

Прирастът (увеличаването) на количеството информация I се определя чрез отношението на двете вероятности P_2 и P_1 , но в логаритмична мярка:

$$I = \log_2 \frac{P_2}{P_1} = \log_2 P_2 - \log_2 P_1 \quad (2.3)$$

Приетото съобщение е вярно, ако в канала за връзка няма никакви смущения. Тогава $P_2 = 1$ и $\log_2 P_2 = 0$. За количеството информация се получава съвсем простата формула

$$I = -\log_2 P_1 \quad (2.4)$$

При числени пресмятания знакът минус изчезва в крайния резултат, защото $0 < P_1 < 1$, от където следва, че логаритъмът от P_1 в общия случай е отрицателно число.

В техническите системи за предаване на дискретна информация се използват две състояния, поради което $P_1 = 1/2$. Сега може да се определи единицата за количество информация:

$$I = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1 \quad (2.5)$$

Тази единица се нарича *двоична* и се означава с *bit* (*binary digit*-двоична единица). С други думи 1 *bit* информация ще се получи, когато се сбъдне едно от две равновероятни събития (възможности).

За оценка на прирастът на информацията е избрана логаритмична функция, тъй като тя притежава свойството “*адитивност*”. То се състои в това, че при предаване на няколко съобщения N , за независими едно от други събития, пълната информация се оказва равна на сумата от информациите, които се съдържат в отделните съобщения. Изразено по друг начин, това означава, че количеството информация в съобщението е линейна функция на неговата дължина.

Ще отбележим, че “съобщение” се нарича всяко елементарно твърдение, чрез което намалява неопределеността в познанието ни за даден обект или множество.

Очевидно е, че ако за дадено множество е възможно само едно единствено съобщение, количеството информация е нула.

$$I = \log_2 N = \log_2 1 = 0 \text{ [bit]}$$

Картинна представа за понятието “1bit” количество информация може да се получи от разглеждането на показаната на фиг. картина на френския художник Bartlett, представляваща два образа-на млада жена и старица. При възприемането на един от тези два еднакво вероятни образа се получава точно един бит количество информация.



фиг. 2.13

Две равновероятни събития могат да се означат като символи, например 0 и 1. Ако се разполага с общо n на брой символа и при формирането на едно съобщение са необходими m от тях, то общия брой на възможните съобщения е

$$N = m^n \quad (2.6)$$

Така например при $m=2$ и $n=3$ са възможни $N = 2^3 = 8$ съобщения (000, 001, 010, 011, 100, 101, 111). Техният брой зависи експоненциално от символите n . Това е неудобството за прякото

използване на N при определяне броя на съобщенията и за количеството информация.

Във връзка с това Р. Хартли също е предложил логаритмична мярка. Ако количеството информация е I , то

$$I = \log N = \log m^n = n \log m \quad (2.7)$$

За да се изрази I в *bit*, трябва при $m=2$ за основа на логаритъма да се приеме числото 2. Получава се

$$I = n \log_2 m = n \log_2 2 = n \text{ [bit]}. \quad (2.8)$$

Както се вижда и от последния израз, без логаритмична мярка величината N не може да служи за оценка.

Съобразно основата на логаритъма се различават и други единици за количество на информацията. При използване на неперовото число e се получава единица *nit* (*nit*). Тя е 1,44 пъти по-голяма от *bit*

$$1 \text{ nit} \approx 1,44 \text{ bit} \quad (2.9 \text{ а})$$

Ако се използва десетичен логаритъм в изрази 2.4 количеството информация се измерва в *dit* (*dit*). Тази единица се нарича още *Хартли*. Връзката между нея и двоичната единица се определя със зависимостта

$$1 \text{ dit} \approx 3,32 \text{ bit} \quad (2.9 \text{ б})$$

През 1948 г. американския учен Клод Шенон (Shannon) предлага средното количество информация, съдържащо се в едно съобщение, да се определя чрез *ентропията* H .

Тук понятието “ентропия” е въведено във връзка с обстоятелството, че тя се определя с израз, чиято форма е аналогична на формата на известния от Болцман (Boltzmann) израз за определяне на термодинамичната ентропия. Съгласно този закон ентропията на всяка затворена макросистема се стреми винаги към нарастване. Това означава, че всички затворени системи се стремят от по-малко вероятни към по-вероятни състояния, т.е. от състояния които се характеризират с по-малка организираност, по-малка подреденост на материята. Следователно, ентропията може да се схваща в смисъл и като мярка за безпорядък, неорганизираност, неподреденост.

Идеята за получаване на информация се състои в това, че с нейното получаване се увеличава организираността. Във връзка с това обстоятелство информацията може да се разглежда като *отрицателна ентропия-негентропия*.

Създаването на информация трябва да спира нарастването на ентропията. В своята цялост заобикалящият ни материален свят се

характеризира с нарастването на ентропията, докато развитието на живота, прогресът на обществото на хората се характеризира с нарастване на информацията.

В теорията на информацията *ентропията определя способността на източника да отдава информация.*

Шенон е доказал, че средното количество информация може да се определи с изрази

$$I_{cp} = -\sum_{i=1}^k P_i \log_2 P_i = H [\text{bit/ символ}], \quad (2.10)$$

където P_i е вероятността за поява на отделни символи (букви, цифри, знаци, предмети) съдържащи се в дадено множество.

Очевидно е, че $\sum P_i = 1$. Изразът 2.10 е известен в теорията на информацията под названието *ентропия по Шенон*. Измерението на ентропията е в *bit*.

От практическа гледна точка са характерни три случая:

1) Ако едно от събитията е достоверно, то ентропията е 0:

$$P_j=1; P_1=P_2=P_{i-1}=P_{j+1}=\dots=P_k=0; \quad H=0$$

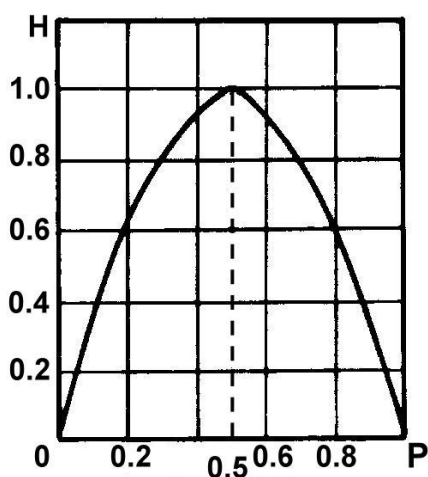
2) При равновероятни събития ентропията има максимална стойност:

$$P_1=P_2=\dots=P_k; \quad H=H_{max}$$

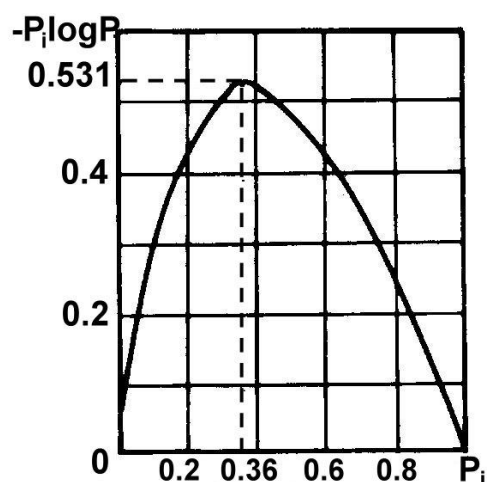
3) Когато събитията са с различна вероятност и сред тях няма достоверно събитие, ентропията е по-голяма от нула и по-малка от минималната стойност

$$P_1 \neq P_2 \neq \dots \neq P_k; \quad P_j=1 \ (i=1, 2, \dots, k)$$
$$0 < H < H_{max}$$

На фиг. 2.14 е дадена зависимостта на ентропията за едно предметно събитие от вероятността за появяването му.



фиг. 2.14



фиг. 2.15

Дискретните съобщения в практиката обаче са с *понижена ентропия* по следните причини:

- а) символите са с различна вероятност;
- б) съществува корелационна връзка между тях, например често пъти една буква се появява точно след друга и т.н.

Графиката на функцията $-P_i \log P_i = f(P_i)$ е показана на фиг. 2.15. Вижда се, че при $P_i < 0,1$ величината $P_i \log P_i$ расте бързо и достига максимума 0,531 за $P_i = 0,36$. Това означава, че на даден участък даже незначителното намаляване на вероятността P води до рязкото намаляване на събираемото $P_i \log P_i$, т.е. при малки стойности на вероятността P_i членовете в израза за ентропия, съдържащи P_i не играят съществена роля и могат да бъдат изпуснати.

Това е от съществено значение при дискретизацията на сигнали, които имат широк честотен спектър. Благодарение на понижената ентропия е възможно да се осъществи цифровизация и предаване на разстояние на подвижни цветни и черно-бели телевизионни изображения.

Всяко съобщение съдържа някакъв *информационен излишък*. Наличието му означава влягане на повече средства при изграждането на системи за обработка и пренасяне на информация.

Информационният излишък R се определя от израза

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}}, \quad (2.11)$$

където H е действителната ентропия, а $H_{\max}$ – максималната.

Излишъкът може да се използва за повишаване на достоверността при предаване на информация от една на друга система чрез защита от

грешки. Това е характерно за шумоустойчивото кодиране, което позволява откриване и коригиране на грешно предадени символи.

От каналите за връзка обикновено се изисква да се осигурява бързо и качествено предаване на съобщенията, а чрез тях и на съответната информация. Скоростта на предаване се ограничава от честотния спектър и шумовете.

За оценяване на пропускателната способност на канала за връзка C се използва количеството информация I , която може да се предаде за единица време t :

$$C = \frac{I}{t} \text{ [bit/s]} \quad (2.12)$$

При наличие на бял шум (флуктоационен шум с непрекъснат и почти равномерен спектър) амплитудата на сигнала може да се различи с точност до ефективната стойност на шума $\sqrt{P_{ш}}$.

Броят на нивата, които се различават са:

$$M = \frac{\sqrt{P_c + P_{ш}}}{\sqrt{P_{ш}}} = \sqrt{1 + \frac{P_c}{P_{ш}}} \quad (2.13)$$

Най-голямото количество информация, което може да се пренесе от един импулс съставен от M нива е

$$I = \log_2 M = \log_2 \sqrt{1 + \frac{P_c}{P_{ш}}} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{ш}} \right). \quad (2.14)$$

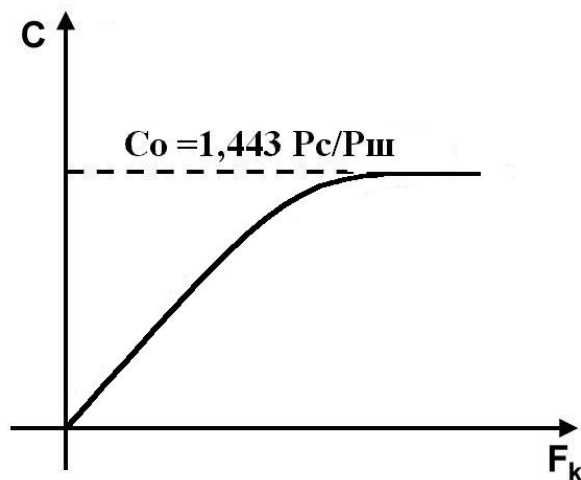
Ако каналът за връзка има лента на пропускане F_k , по него могат да се предадат за една секунда $2F_k$ импулса. Тъй като един импулс може да пренесе количество информация, определено чрез 2.14, каналът за връзка ще пропусне за една секунда $2F_k$ по-голямо количество информация, т.е. неговата пропускателна способност е

$$C = 2F_k \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{ш}} \right) = F_k \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{ш}} \right). \quad (2.15)$$

Последният израз е известен в литературата под наименованието формула на *Шенон-Хартли* и се смята за *основна теорема в теорията на информацията*.

От 2.15 може да се направи извода, че пропускателната способност на канала за връзка може да се регулира, като се увеличи или честотната лента на канала F_k или отношението $P_c/P_{ш}$. Трябва да се има напредвид, че увеличението на F_k увеличава C само в известни граници, тъй като то е свързано и с увеличението на мощността на шума. На фиг. 2.16 е показано изменението на C в зависимост от F_k .

Вижда се, че увеличението на C от някаква стойност нататък, губи смисъл, тъй като C клони към константата C_0 . Допълнително увеличение на C може да се получи само чрез увеличение на отношението сигнал/шум.



фиг. 2.16

Чрез формулата на Шенон-Хартли се доказва възможността за предаване на съобщения и при *отрицателен динамичен диапазон*, т.е. при $P_{ш} > P_c$, което е от особено значение при космическите и военни радиовръзки.

Ако $P_{ш} \rightarrow 0$, $C \rightarrow \infty$, т.е. при намаляване на мощността на шума пропускателната способност на канала нараства неограничено и тя се определя само от свойствата на канала, т.е.

$$C = F_k \cdot D_k \quad (2.16)$$

откъдето следва, че

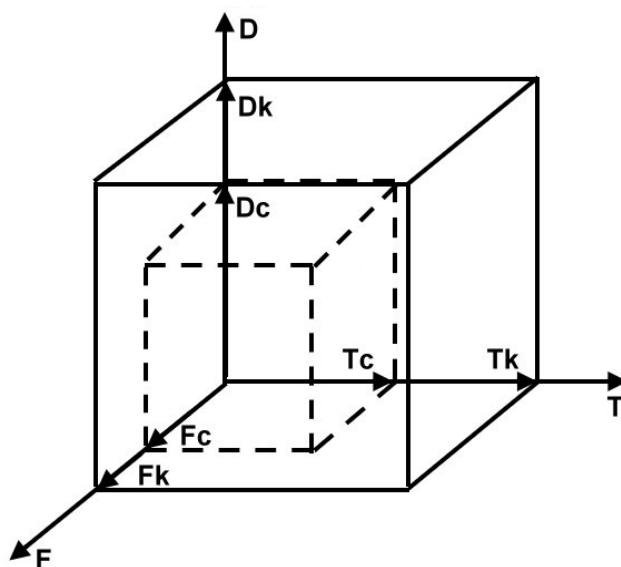
$$I = F_k \cdot T_k \cdot D_k \quad (2.17)$$

Като се има на предвид /1.5/ и /1.6/ може да се дефинира условието за неизкривено предаване на даден сигнал по канал за връзка. То е

$$V_c \leq V_k \quad (2.18)$$

Това условие не е достатъчно и то се разделя на три подусловия, които трябва да бъдат спазени:

$$T_c \leq T_k; \quad F_c \leq F_k; \quad D_c \leq D_k. \quad (2.19)$$



фиг. 2.17

Геометричната интерпретация на условия (2.19) е много проста: *неизкривено предаване на сигнал по даден канал е възможно само ако обемът на сигнала V_c напълно се вписва в обема на канала V_k* - фиг. 2.17.