Висша математика
втора част
Лекция No 5

Интегриране по части при определения интеграл

Теорема 1 за интегриране по части при определения интеграл. *Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са непрекъснато диференцируеми в интервала $[a, b]$. Тогава*

$$\int_a^b u dv + \int_a^b v du = uv\Big|_a^b. \tag{1}$$

Доказателство. Диференцираме произведението uv по формулата за производна на произведение

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Това означава, че uv е примитивна функция за $u'v + uv'$. Съгласно теоремата на Лайбниц-Нютон можем да използваме произволна примитивна в интервала $[a, b]$

$$\int_a^b (u'v + v'u)dx = uv\Big|_a^b. \tag{2}$$

От друга страна

$$\int_a^b (u'v + v'u)dx = \int_a^b vu'dx + \int_a^b uv'dx = \int_a^b vdu + \int_a^b udv. \tag{3}$$

От (2) и (3) следва верността на (1).□

В задачи ще използваме формула (1) записана по следния начин

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{4}$$

Пример 1 *Да се реши интегралът* $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. Прилагаме формула (4) при условие, че $u = \ln x$ и $v = x$

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x d \ln x$$

$$= e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e x(\ln x)' dx = e - \int_1^e x.\frac{1}{x} dx$$

$$= e - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = e - (e-1) = 1.\Box$$

Пример 2 *Да се реши интегралът* $\int_0^1 xe^x dx$.

Решение. Подинтегралната функция $f(x) = xe^x$ представлява произведение на две функции. За да решим интеграла трябва да внесем под знака на диференциала единия множител. Решаваме помощния интеграл

$$\int e^x dx = e^x + C$$

и внасяме функцията e^x

$$I = \int_0^1 x de^x.$$

Интегрираме по части

$$I = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx.$$

Получаваме табличен интеграл, за който прилагаме формулата на Лайбниц-Нютон

$$I = 1.e^1 - 0.e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.\Box$$

Пример 3 *Да се реши интегралът* $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Прилагаме формула (4) при условие, че $u = \operatorname{arctg} x$ и $v = x$

$$I = \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 x d \operatorname{arctg} x$$

$$= 1 \operatorname{arctg} 1 - 0 \operatorname{arctg} 0 - \int_0^1 x(\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Решаваме помощния интеграл

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

за да внесем множителя x под знака на диференциала

$$I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{d\frac{x^2}{2}}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2. \square$$

Пример 4 *Да се реши интегралът* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$.

Решение. Пресмятаме неопределения интеграл

$$\int \cos xdx = \sin x + C.$$

Внасяме функцията $\cos x$ под знака на диференциала и интегрираме по части

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\sin 0 - (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1. \square$$

Пример 5 *Да се реши интегралът* $\int_0^{\pi} x\sin xdx$.

Решение. Решаваме помощния интеграл

$$\int \sin xdx = -\cos x + C,$$

Внасяме функцията $\sin x$ под знака на диференциала и интегрираме по части

$$\int_0^\pi xd(-\cos x) = -\int_0^\pi xd\cos x = -\left(x\cos x\bigg|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx\right)$$

$$= -x\cos x\bigg|_0^\pi + \sin x\bigg|_0^\pi = x\cos x\bigg|_\pi^0 + \sin x\bigg|_0^\pi$$
$$= 0\cos 0 - \pi\cos\pi + \sin\pi - \sin 0.$$

Като вземем под внимание, че:

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\pi = -1, \quad \sin 0 = 0, \quad \sin\pi = 0,$$

получаваме $I = \pi.\square$

Пример 6 *Да се реши интегралът* $\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)e^{2x}dx$.

Решение. За да внесем функцията e^{2x} решаваме помощния интеграл

$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{e^{2x}}{2} + C. \tag{5}$$

Внасяме множителя e^{2x}, като записваме примитивната му функция под знака на диференциала

$$I = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)e^{2x}dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)d\frac{e^{2x}}{2}.$$

Изнасяме множителя $\frac{1}{2}$ пред знака за интегриране

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)de^{2x}$$

и интегрираме по части

$$I = \frac{1}{2}\left[(x^2 - 3x + 2)e^{2x}\bigg|_0^1 - \int_0^1 e^{2x}d(x^2 - 3x + 2)\right].$$

Изнасяме полинома от диференциала чрез действие диференциране

$$I = \frac{1}{2}\left[-2e^0 - \int_0^1 e^{2x}(x^2 - 3x + 2)'dx\right]$$

$$= -1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (2x-3)e^{2x}dx.$$

Получихме интеграл от същият тип, но полиномът в подинтегралната функция е от по-ниска степен. Отново внасяме функцията e^{2x} под знака на диференциала, като използваме (5) и интегрираме по части

$$I = -1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (2x-3)d\frac{e^{2x}}{2} = -1 - \frac{1}{4}\int_0^1 (2x-3)de^{2x}$$

$$= -1 - \frac{1}{4}\left[(2x-3)e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x}d(2x-3)\right]$$

$$= -1 - \frac{1}{4}\left[(-1)e^2 - (-3)e^0 - \int_0^1 e^{2x}(2x-3)'dx\right]$$

$$= -1 - \frac{1}{4}\left(-e^2 + 3 - \int_0^1 e^{2x}2dx\right) = -1 + \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx.$$

Така след двукратно интегриране по части получихме интеграл от функция, чиято примитивна е определена в (5). Остава само да приложим формулата на Лайбниц-Нютон

$$I = \frac{e^2}{4} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}.\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2}{4} - \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\left(e^2 - e^0\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^2 - 7 + e^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(2e^2 - 8\right) = \frac{e^2-4}{2}.\square$$

Пример 7 *Да се реши интегралът* $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

Решение. Интегрираме по части

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = x \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} xd\arcsin x$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} - 0\arcsin 0 - \int_0^{\frac{1}{2}} x(\arcsin x)'dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Решаваме интеграла

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

за да внесем числителя под знака на диференциала

$$I = \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Внасяме коефициента (-1) под знака на диференциала и добавяме константата едно

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}.\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{1-0^2} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-\frac{1}{4}} - \sqrt{1}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.\square$$

Пример 8 *Да се реши интегралът* $3\int_1^e x^2 \ln x dx$.

Решение. Пресмятаме неопределения интеграл

$$I = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Внасяме функцията x^2 под знака на диференциала

$$I = 3\int_1^e \ln x d\frac{x^3}{3}.$$

Изнасяме множителя $\frac{1}{3}$ пред знака за интегриране

$$I = 3.\frac{1}{3}\int_1^e \ln x dx^3 = \int_1^e \ln x dx^3.$$

Интегрираме по части

$$I = x^3 \ln x\Bigg|_1^e - \int_1^e x^3 d\ln x = e^3 \ln e - 1^3 \ln 1 - \int_1^e x^3 (\ln x)' dx$$

$$= e^3 - \int_1^e x^3.\frac{1}{x}dx = e^3 - \int_1^e x^2 dx = e^3 - \frac{x^3}{3}\bigg|_1^e = e^3 - \frac{1}{3}\left(e^3 - 1^3\right)$$

$$= e^3 - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{3} = \frac{2e^3+1}{3}.\square$$

Пример 9 *Да се реши интегралът* $2\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Внасяме множителя x под знака на диференциала

$$I = 2\int_0^1 \operatorname{arctg} x d\frac{x^2}{2}.$$

Изнасяме константата $\frac{1}{2}$ пред знака за интегриране и интегрираме по части

$$I = 2.\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx^2 = \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx^2$$

$$= x^2 \operatorname{arctg} x\bigg|_0^1 - \int_0^1 x^2 d \operatorname{arctg} x = 1^2 \operatorname{arctg} 1 - 0^2 \operatorname{arctg} 0$$

$$- \int_0^1 x^2 (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Добавяме и изваждаме единица пред знака на диференциала

$$I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx.$$

Разделяме на два интеграла

$$I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - x\bigg|_0^1 + \operatorname{arctg} x\bigg|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - (1-0) + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1.\square$$

Пример 10 *Да се реши интегралът* $\int_1^e \frac{\ln(1+\ln x)}{x}dx$.

Решение. Полагаме $x = e^t$. Определяме

$$dx = de^t = (e^t)'dt = e^t dt, \quad \ln x = \ln e^t = t \text{ и}$$

$$\frac{\ln(1+\ln x)}{x} = \frac{\ln(1+t)}{e^t}.$$

От $t = \ln x$ пресмятаме новите граници

x	1	e
t	$0 = \ln 1$	$1 = \ln e$

.

Сменяме променливата

$$I = \int_1^e \frac{\ln(1+\ln x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{e^t}e^t dt = \int_0^1 \ln(1+t)dt.$$

Интегрираме по части

$$I = t\ln(1+t)\Big|_0^1 - \int_0^1 t d\ln(1+t)$$

$$= 1\ln 2 - 0\ln 1 - \int_0^1 t\left(\ln(1+t)\right)' dt$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{t}{1+t}\left(1+t\right)' dt = \ln 2 - \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt.$$

Добавяме и изваждаме числото едно пред знака на диференциала

$$I = \ln 2 - \int_0^1 \frac{1+t-1}{1+t}dt = \ln 2 - \int_0^1 \left(\frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t}\right) dt.$$

Разделяме на два интеграла

$$I = \ln 2 - \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln 2 - \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{d(1+t)}{1+t}$$

$$= \ln 2 - t\Big|_0^1 + \ln(1+t)\Big|_0^1 = \ln 2 + (\ln 2 - \ln 1) - (1-0) = 2\ln 2 - 1.\square$$

Задачи за домашна работа

Решете интегралите.

1. $\int_0^1 (3x-2)e^x dx$ 2. $\int_1^e x\ln x dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos x dx$.

Геометрични приложения на определения интеграл

Лице на фигура

Разглеждаме функция $f(x)$ непрекъсната и положителна в краен затворен интервал $[a,b]$. Разделяме интервала $[a,b]$ на части посредством делящи точки $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$, фиг. 1. Дължината на i-ия подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$ означаваме с Δx_i и нека $h = \max_{i=1,2,...,n} \Delta x_i$. Във всеки подинтервал избираме произволно точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Образуваме сумите

$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \overline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

където

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \text{и} \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Определение 1 *Сумите*

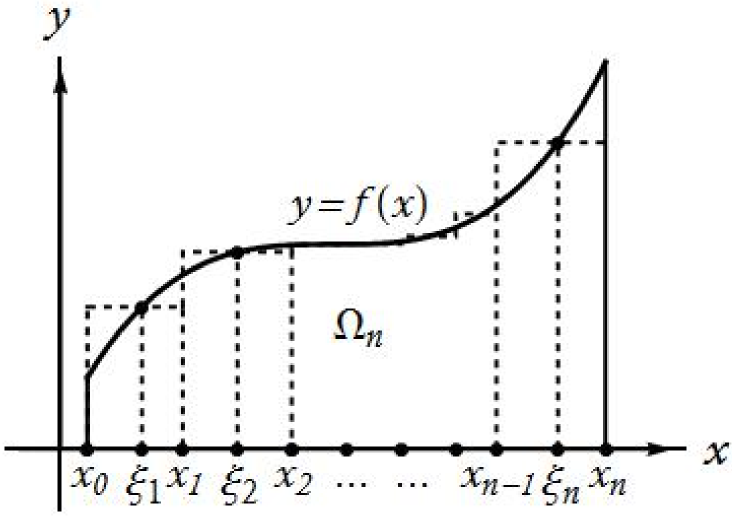
$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \textit{и} \quad \overline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

се наричат съответно малка и голяма сума на Дарбу (Darboux).

В случай, че $f(x)$ е непрекъсната сумите на Дарбу представляват частен случай на Риманова интегрална сума. Очевидно
$\underline{s}_n \leq s_n \leq \overline{s}_n$.

Криволинейния трапец заключен между линиите $x = a$, $y = f(x)$, $x = b$ и $y = 0$ можем да запишем на кратко така

$$\Omega = \{P(x,y) \mid 0 \leq y \leq f(x), \ a \leq x \leq b\}.$$



Фигура 1: *Приближаване на криволинеен трапец чрез фигура с праволинейна граница.*

Числата $\underline{s}_n$, s_n, $\overline{s}_n$ са съответно лицата на следните многоъгълници:

$$\underline{\Omega}_n = \{P(x,y) \mid 0 \le y \le m_i, \ \ x_{i-1} \le x \le x_i, \ \ i = \overline{1,n}\},$$

$$\Omega_n = \{P(x,y) \mid 0 \le y \le f(\xi_i), \ \ x_{i-1} \le x \le x_i, \ \ i = \overline{1,n}\},$$

$$\overline{\Omega}_n = \{P(x,y) \mid 0 \le y \le M_i, \ \ x_{i-1} \le x \le x_i, \ \ i = \overline{1,n}\}.$$

Многоъгълникът $\underline{\Omega}_n$ е вписан в Ω, а $\overline{\Omega}_n$ е описан около Ω.

Означаваме лицето на фигурата Ω чрез $S(\Omega)$.

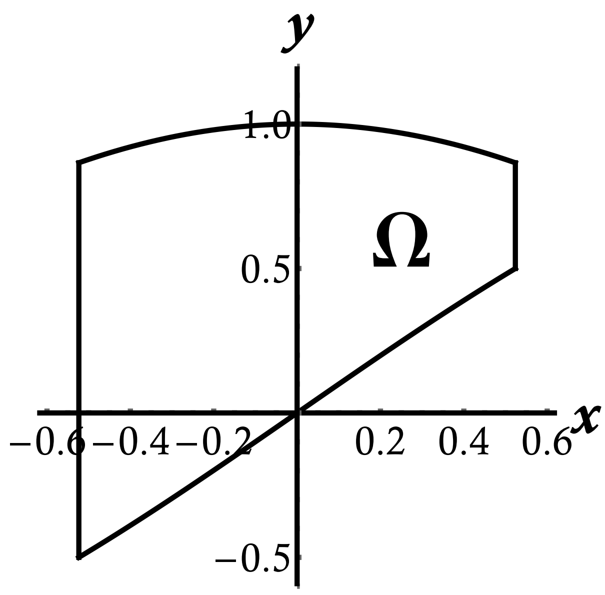
Определение 2 ЗА ЛИЦЕ НА КРИВОЛИНЕЕН ТРАПЕЦ С ВЕРТИКАЛНИ ОСНОВИ. *Ако границата на $S(\underline{\Omega}_n)$ е равна на границата на $S(\overline{\Omega}_n)$ при $h \to 0$ и произволно разделяне на интервала $[a,b]$ на подинтервали казваме, че фигурата Ω има лице $S(\Omega) = \lim_{h\to 0} S(\underline{\Omega}_n)$.*

Тъй като $f(x)$ е непрекъсната в краен затворен интервал

$$\lim_{h\to 0} s_n = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Числата $\underline{s}_n$ и $\overline{s}_n$ са също Риманови интегрални суми. Затова

$$\lim_{h\to 0} \underline{s}_n = \lim_{h\to 0} \overline{s}_n = \int_a^b f(x)dx.$$



Фигура 2: Множеството Ω от пример 11.

Последното означава, че

$$S(\Omega) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ако Ω е криволинеен трапец определен с

$$\Omega = \{P(x, y) \ | \ f(x) \le y \le g(x), \ \ a \le x \le b\},$$

то лицето $S(\Omega)$ се пресмята чрез

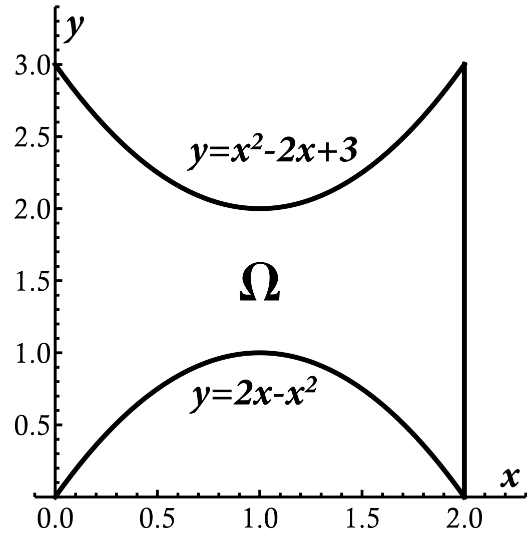
$$S(\Omega) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx. \tag{6}$$

Нека Ω е фигура в равнината със сложна геометрия. Разделяме Ω на n части $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup ... \cup \Omega_n$ всяка от които представлява криволинеен трапец с вертикални основи. Тогава $S(\Omega) = S(\Omega_1) + S(\Omega_2) + ... + S(\Omega_n)$.

Пример 11 *Пресметнете лицето на криволинейния трапец* Ω *ограничен от линиите* $y = \cos x, \ \ y = \sin x, \ \ x = -\frac{\pi}{6}, \ \ x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. В интервала $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ е в сила неравенството $\sin x < \cos x$, фиг. 2. Записваме криволинейния трапец Ω чрез неравенства

$$\Omega = \left\{ P(x, y) \ | \ \sin x \le y \le \cos x, \ \ -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6} \right\}.$$



Фигура 3: Множеството Ω от пример 12.

Лицето на Ω пресмятаме съгласно формула 6

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin x) dx.$$

Използваме, че функцията $\sin x$ е нечетна и функцията $\cos x$ е четна в комбинация със свойство (xi)

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$$

$$= 2 \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 \right) = 2.\frac{1}{2} = 1.\square$$

Пример 12 *Пресметнете лицето на множеството Ω ограничено от линиите $y = 2x - x^2$, $y = x^2 - 2x + 3$, $x = 0$, $x = 2$.*

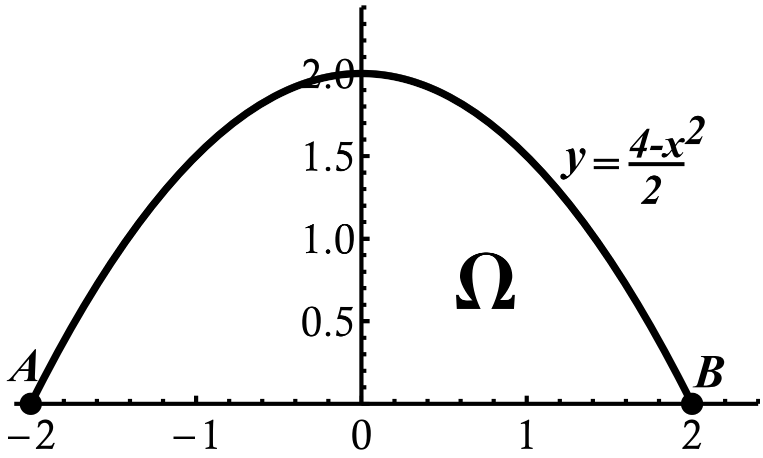
Решение. Записваме върховите уравнения на двете параболи

$$\pi_1 \ : \ y = 2x - x^2 \Leftrightarrow y - 1 = -1 + 2x - x^2 \Leftrightarrow y - 1 = -(x-1)^2,$$

$$\pi_2 \ : \ y = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow y - 2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow y - 2 = (x-1)^2,$$

фиг. 3. Параболата π_2 ограничава фигурата Ω отгоре, а π_1 отдолу, затова

$$S = \int_{0}^{2} \left[(x^2 - 2x + 3) - (2x - x^2) \right] dx$$



Фигура 4: Множеството Ω от пример 13.

$$= \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 3 - 2x + x^2\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^2 - 4x + 3\right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{2.2^3}{3} - 2.2^2 + 3.2 = \frac{16}{3} - 8 + 6 = 5\frac{1}{3} - 2 = 3\frac{1}{3}.\square$$

Пример 13 *Пресметнете лицето на множеството Ω ограничено от линиите $2y = 4 - x^2, \;\; y = 0$.*

Решение. Определяме пресечните точки A и B на параболата $\pi \;:\; 2y = 4 - x^2$ и правата $l \;:\; y = 0$, фиг. 4, като решаваме системата

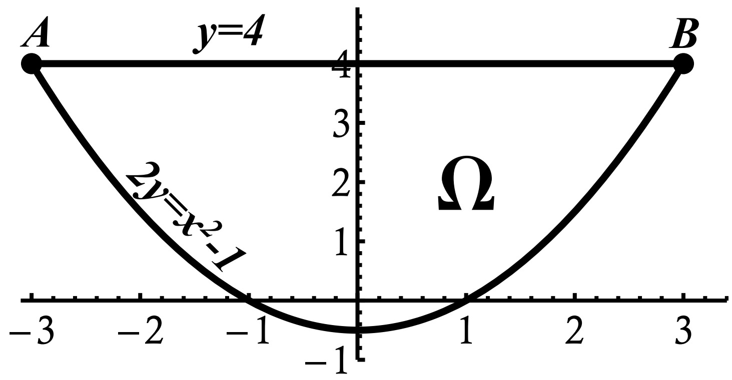
$$\{A, B\} \;:\; \begin{cases} 2y = 4 - x^2, \\ y = 0 \end{cases}.$$

Числата ± 2 са решения на уравнението $\frac{4-x^2}{2} = 0$, затова $A(-2, 0)$ и $B(2, 0)$. Параболата π ограничава фигурата Ω отгоре, а абсцисната ос отдолу, затова

$$S = \int_{-2}^2 \frac{4 - x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left(4 - x^2\right) dx.$$

Тъй като подинтегралната функция е четна прилагаме свойство (xi)

$$S = \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$$



Фигура 5: Множеството Ω от пример 14.

$$= 4.2 - \frac{2^3}{3} = 8 - \frac{8}{3} = 8\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8.\frac{2}{3} = \frac{16}{3}.\square$$

Пример 14 *Пресметнете лицето на множеството* Ω *ограничено от линиите* $2y = x^2 - 1, \ \ y = 4$.

Решение. Определяме пресечните точки A и B на параболата $\pi \ :$ $2y = x^2 - 1$ с правата $l \ : \ y = 4$, фиг. 5, като решим системата

$$\{A, B\} \ : \ \begin{cases} 2y = x^2 - 1, \\ y = 4 \end{cases} .$$

Приравняваме стойностите на y от двете уравнения

$$\begin{cases} 2y = x^2 - 1, \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{2} = 4 \Rightarrow x^2 = 9.$$

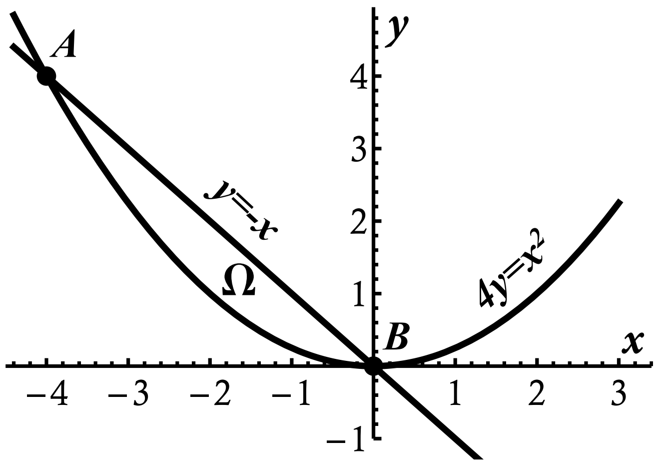
Тогава $A(-3, 4)$ и $B(3, 4)$. Пресмятаме лицето, като отчитаме, че правата l ограничава фигурата Ω отгоре, а параболата π отдолу

$$S = \int_{-3}^{3} \left(4 - \frac{x^2 - 1}{2}\right) dx = \int_{-3}^{3} \frac{8 - (x^2 - 1)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right) dx = \int_{0}^{3} \left(9 - x^2\right) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3$$

$$= 9.3 - \frac{3^3}{3} = 27 - 9 = 18.\square$$

Пример 15 *Пресметнете лицето на множеството* Ω *ограничено от линиите* $4y = x^2, \ \ y = -x$.



Фигура 6: Множеството Ω от пример 15.

Решение. Пресичаме параболата $\pi\ :\ 4y = x^2$ и правата $l\ :\ y = -x$, фиг. 6, като решим системата

$$\{A, B\}\ :\ \begin{cases} 4y = x^2, \\ y = -x \end{cases}.$$

Приравняваме стойностите на y от двете уравнения

$$\begin{cases} 4y = x^2, \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = -x \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0.$$

Тогава $A(-4, 4)$ и $B(0, 0)$. Пресмятаме лицето, като отчитаме, че правата l ограничава фигурата Ω отгоре, а параболата π отдолу

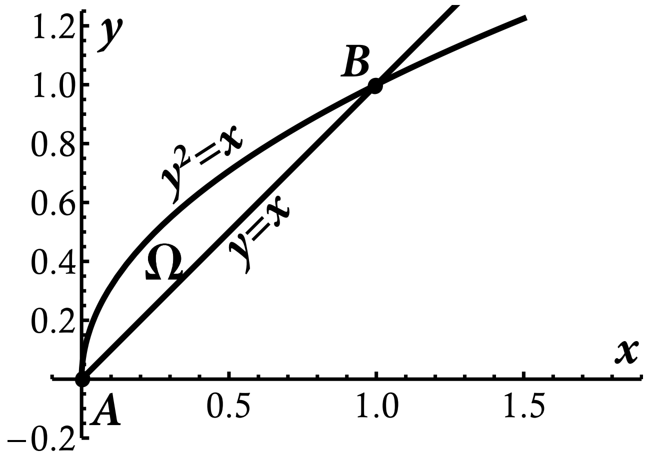
$$S = \int_{-4}^{0} \left(-x - \frac{x^2}{4}\right) dx = -\int_{-4}^{0} \frac{x^2 + 4x}{4} dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-4}^{0} \left(x^2 + 4x\right) dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{-4} \left(x^2 + 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^{-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{(-4)^3}{3} + 2(-4)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(32 - \frac{64}{3}\right) = 8\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}.\square$$

Пример 16 *Пресметнете лицето на множеството* Ω *ограничено от линиите* $y = \sqrt{x},\ \ y = x$.



Фигура 7: Множеството Ω от пример 16.

Решение. Линията $\pi \ : \ y = \sqrt{x}$ представлява горният клон на параболата $y^2 = x$, фиг. 7. Пресичаме π с правата $l \ : \ y = x$, като решим системата

$$\{A, B\} \ : \ \begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x \end{cases}.$$

Приравняваме стойностите на y от двете уравнения

$$x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0.$$

Получаваме $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Тогава $A(0,0)$ и $B(1,1)$ са пресечните точки на π и l. Пресмятаме лицето, като отчитаме, че параболата π ограничава фигурата Ω отгоре, а правата l отдолу

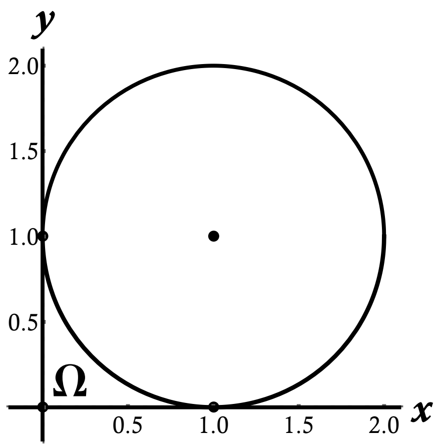
$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$- \int_0^1 x dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1 - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1 - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \square$$

Пример 17 *Пресметнете лицето на множеството Ω ограничено от окръжността $\omega \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и координатните оси.*

Решение. Окръжността ω пресича координатните оси в точките $A(0,1)$ и $B(1,0)$, фиг. 8. Изразяваме y от уравнението на ω

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - (x-1)^2}.$$



Фигура 8: Множеството Ω ограничено от окръжност и координатните оси.

Множеството Ω се определя с

$$\Omega = \left\{ P(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{1 - (x-1)^2}, \;\; 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

Тогава лицето се получава от

$$S = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - (x-1)^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx.$$

Във втория интеграл полагаме

$$x - 1 = \sin t \Leftrightarrow x = \sin t + 1.$$

Пресмятаме

$$dx = d(\sin t + 1) = (\sin t + 1)' dt = \cos t dt,$$

$t = \arcsin(x - 1)$ и

x	0	1
t	$-\frac{\pi}{2} = \arcsin(-1)$	$0 = \arcsin 0$

.

Преобразуваме подинтегралната функция

$$\sqrt{1 - (x-1)^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|.$$

Тъй като $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ за подинтегралната функция имаме

$$\sqrt{1-(x-1)^2} = \cos t.$$

Сменяме променливата

$$S = x\Big|_0^1 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t . \cos t dt = 1 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t dt.$$

Понижаваме степента в подинтегралната функция и разделяме на два интеграла

$$= 1 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 1 - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1+\cos 2t) dt$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dt - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2t dt = 1 - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dt - \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2t d2t$$

$$= 1 - \frac{1}{2} t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 1 - \frac{1}{2}\left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left[\sin 0 - \sin 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\left[-\sin(-\pi)\right]$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin \pi = 1 - \frac{\pi}{4}. \square$$

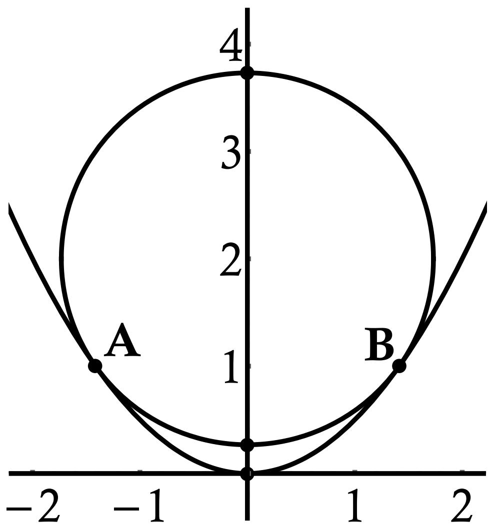
Забележка 1 *Задачата от пример 17 може да бъде решена и с помощта на елементарна геометрия. Нека S_2 е лицето на описания около окръжността квадрат, а S_1 е лицето на кръга с център точката $(1,1)$ и радиус единица, фигура 8. Тогава*

$$S = \frac{1}{4}(S_2 - S_1) = \frac{1}{4}\left(a^2 - \pi r^2\right) = \frac{1}{4}\left(2^2 - \pi . 1^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(4-\pi) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Геометричният подход за пресмятане на лица обаче е в сила само в изолирани частни случаи.

Пример 18 *Пресметнете лицето на множеството Ω ограничено от линиите $2y = x^2$ и $x^2 + (y-2)^2 = 3$.*



Фигура 9: Множеството Ω ограничено от окръжност и парабола.

Решение. Параболата $\pi\ :\ 2y = x^2$ ограничава множеството Ω отдолу, а окръжността $\omega\ :\ x^2 + (y-2)^2 = 3$ отгоре, фиг. 9. Нека $\{A, B\} = \pi \bigcap \omega$. Решаваме системата

$$\{A, B\}\ :\ \left\{ \begin{array}{c} 2y = x^2, \\ x^2 + (y-2)^2 = 3 \end{array} \right. ,$$

като заместим x^2 от първо уравнение във второ

$$2y + (y-2)^2 = 3 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 = 3 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1.$$

Получаваме $A(-\sqrt{2}, 1)$ и $B(\sqrt{2}, 1)$. От уравнението на ω изразяваме

$$y = 2 \pm \sqrt{3 - x^2}.$$

Записваме множеството Ω чрез неравенства

$$\Omega = \left\{ P(x, y) \mid \frac{x^2}{2} \leq y \leq 2 - \sqrt{3 - x^2},\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \right\}.$$

Тогава лицето се пресмята чрез

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2 - \sqrt{3 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \sqrt{3 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx - 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{3 - x^2} dx.$$

За да решим първия интеграл прилагаме директно формулата на Лайбниц и Нютон

$$I_1 = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left(2x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$
$$= 2\left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{6}\right) = 4\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 4\sqrt{2}\frac{5}{6} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

За да решим интеграла

$$I_2 = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{3 - x^2} dx$$

правим смяна на променливата $x = \sqrt{3}\sin t$. Тогава

$$dx = d(\sqrt{3}\sin t) = (\sqrt{3}\sin t)' dt = \sqrt{3}(\sin t)' dt = \sqrt{3}\cos t dt,$$

$$t = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \begin{array}{|c||c|c|} \hline x & 0 & \sqrt{2} \\ \hline t & 0 & \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \hline \end{array}.$$

Полагаме $b = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. Преобразуваме подинтегралната функция

$$\sqrt{3 - x^2} = \sqrt{3 - 3\sin^2 t} = \sqrt{3\left(1 - \sin^2 t\right)}$$
$$= \sqrt{3}\sqrt{\cos^2 t} = \sqrt{3}|\cos t|.$$

Тъй като $t \in [0, b]$ за подинтегралната функция получаваме

$$\sqrt{3 - x^2} = \sqrt{3}\cos t.$$

Така за интеграл I_2 имаме

$$I_2 = 2\int_0^b \sqrt{3}\cos t\sqrt{3}\cos t dt = 6\int_0^b \cos^2 t dt$$

$$= 6\int_0^b \frac{1+\cos 2t}{2} tdt = 3\int_0^b (1+\cos 2t)tdt$$

$$= 3\left(\int_0^b dt + \int_0^b \cos 2tdt\right) = 3t\Big|_0^b + \frac{3}{2}\int_0^b \cos 2td2t = 3b$$

$$+\frac{3}{2}\sin 2t|_0^b = 3b + \frac{3}{2}\sin 2b = 3b + \frac{3}{2}2\sin b\cos b = 3b + 3\sin b\cos b$$

$$= 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sin\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cos\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Прилагаме формулата

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos x)$$

за да получим окончателен резултат за

$$I_2 = 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$+3\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}} = 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{2}.$$

Лицето S пресмятаме, като разлика на интегралите I_1 и I_2

$$S = I_1 - I_2 = \frac{10\sqrt{2}}{3} - 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{2}$$

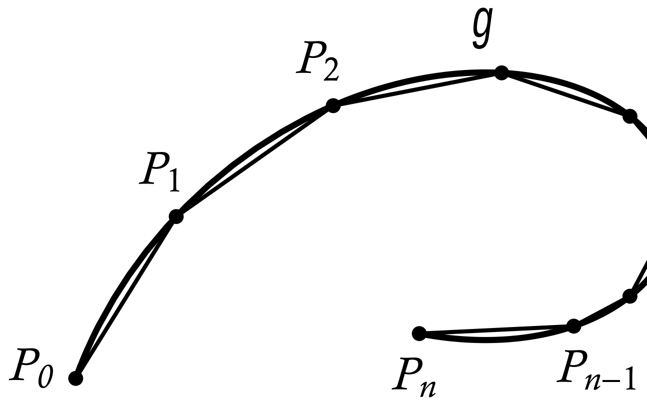
$$= \left(\frac{10}{3} - 1\right)\sqrt{2} - 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{2} - 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}.\square$$

Задачи за домашна работа

В задачи от 1. до 5. пресметнете лицето на множеството ограничено от линиите.

1. $y = x^2,\ y = 4$ 2. $y = x^2,\ y = x$

3. $y = 2 - x^2,\ y = x.$



Фигура 10: *Разделяне на кривата линия γ посредством делящи точки P_0, P_1, P_2,..., P_n.*

Дължина на крива

Върху кривата линия γ, фиг. 10 избираме произволно точки P_0, P_1, P_2, ..., P_n. Свързваме тези точки и получаваме начупена линия γ_n с дължина $\sigma_n = l(\gamma_n)$. Дължината $l(P_{i-1}P_i)$ означаваме с Δs_i. Отсечките $P_{i-1}P_i$ са краен брой. Затова измежду тях има такава с максимална дължина. Дължината на тази отсечка означаваме с

$$h = \max_{i=1,2,\dots,n} \Delta s_i.$$

Очевидно $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$.

Определение 3 за дължина на крива. *Казваме, че кривата γ има дължина, ако $\exists \lim_{h\to 0} \sigma_n$ при произволен избор на точките $P_i \in \gamma$, $i = \overline{1,n}$. Числото $l(\gamma) = \lim_{h\to 0} \sigma_n$ се нарича дължина на кривата γ.*

Теорема 2 *Нека функцията $f(x)$ е непрекъснато диференцируема в краен затворен интервал $[a,b]$. Тогава дължината на кривата γ : $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in [a,b] \end{cases}$ се дава с*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{7}$$

Пример 19 *Пресметнете дължината на линията*

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\ln x}{2} \\ x \in [1, e] \end{cases} .$$

Решение. Пресмятаме производната

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{\ln x}{2}\right)' = \frac{2x}{4} - \frac{1}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

и подинтегралната функция

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2.x.\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 4}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Трите събираеми под корена образуват точен квадрат, затова

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|x + \frac{1}{x}\right|.$$

За да пресметнем дължината на кривата линия γ използваме формула (7)

$$l(\gamma) = \int_1^e \frac{1}{2}\left|x + \frac{1}{x}\right| dx.$$

Тъй като

$$x + \frac{1}{x} > 0 \;\; \forall x \in [1, e]$$

имаме

$$l(\gamma) = \frac{1}{2}\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_1^e$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} + \ln e\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2} + \ln 1\right) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.\square$$

Пример 20 *Пресметнете дължината на линията*

$$\begin{cases} y = \ln \sin x \\ x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

Решение. За да пресметнем дължината на кривата линия γ отново използваме формула (7). Пресмятаме производната

$$f'(x) = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

и подинтегралната функция

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{|\sin x|}.$$

Тъй като

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x > 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{\sin x}.$$

Тогава

$$l(\gamma) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

Внасяме функцията $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ под знака на диференциала

$$l(\gamma) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = \ln\frac{3}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3}.\square$$