

Висша математика

втора част

Лабораторно упражнение

Функция на две променливи. Частни производни

07.04.2020

1. Дефиниция и функция на две променливи.

Функция на две променливи се дефинира чрез

$f[x_, y_] := \text{Аналитичен израз на функцията.}$

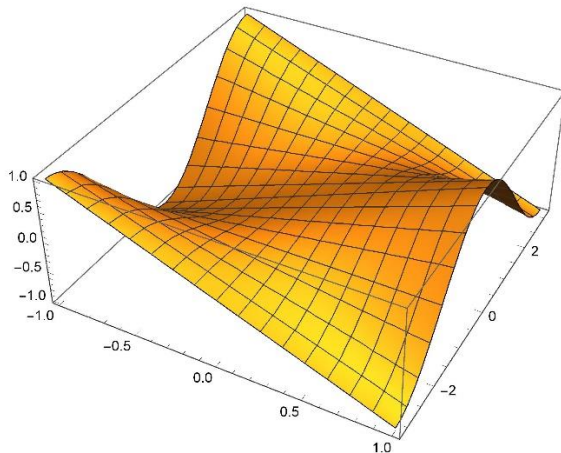
Пример 1.1

$f[x_, y_] := x^2 + 3y^3;$

Графика на функция може да се реализира с различни оператори. Тук разглеждаме най-прости програмни решения чрез оператора *Plot3D*.

(* Начертаване на графика на функция без никакви допълнителни настройки *)

```
Plot3D[x Cos[y], {x, -1, 1}, {y, -Pi, Pi}]
```



(* Графика на функция на две променливи *)

(* Дефиниране на функцията *)

```
f[x_, y_] := x Cos[y];
```

(* Чрез AxesLabel се определят означенията по различните оси. *)

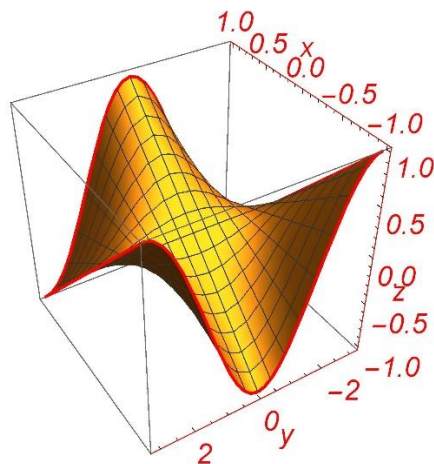
(* BoxRatios дефинира пропорциите между
единичните отсечки по съответните координатни оси. *)

(* В AxesStyle се дефинират цвят и размер на шрифта,
с който се изписват означенията по ръбовете на ограничаващия паралелепипед. *)

(* BoundaryStyle показва как ще изглежда контура на графиката. *)

(* Когато за един обект се задават
повече от едно свойство се използва директива. *)

```
Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -Pi, Pi}, AxesLabel -> {x, y, z}, BoxRatios -> {1, 1, 1},  
AxesStyle -> Directive[Red, Italic, 18], BoundaryStyle -> Directive[Red, Thick]]
```



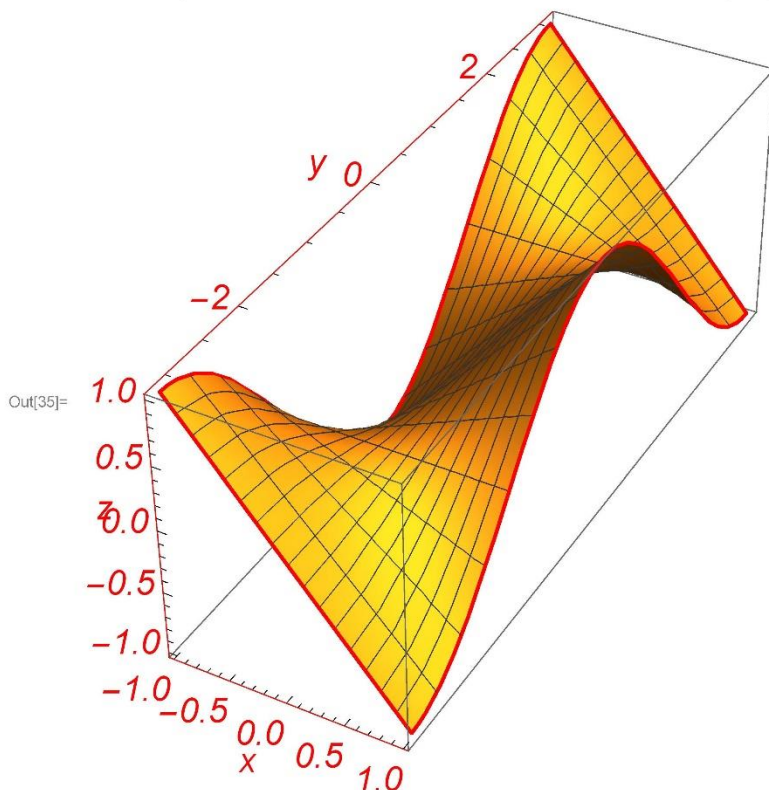
В примера по-долу наблюдаваме промяна на чертежа след изменение на параметрите в *BoxRatios*.

In[34]=

(* Това е графика на същата функция но с променени параметри в BoxRatios *)

f[x_, y_] := x Cos[y];

Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -Pi, Pi}, AxesLabel -> {x, y, z}, BoxRatios -> {0.5, 1.5, 0.6},
AxesStyle -> Directive[Red, Italic, 18], BoundaryStyle -> Directive[Red, Thick]]



2. Задачи за изпълнение.

2.1 Дефинирайте функцията $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ и начертайте нейната графика.

2.2 Дефинирайте функцията $F(a, b) = \int_a^b x \cos x \, dx$ и начертайте нейната графика в квадрата $\Omega = \{P(a, b) \mid -1 \leq a \leq 1, -1 \leq b \leq 1\}$.

3. Пресмятане на частни производни

Частни производни в Mathematica се пресмятат с помощта на оператора D .

$D[f[x, y], x]$ пресмята частна производна на функцията $f(x, y)$ по променливата x .

$D[f[x, y], y]$ пресмята частна производна на функцията $f(x, y)$ по променливата y .

Вторите частни производни се пресмятат чрез

$D[f[x, y], x, x]$, $D[f[x, y], x, y]$ и $D[f[x, y], y, y]$.

Чрез оператора $D[f[x, y], \{x, m\}, \{y, n\}]$ можем да пресметнем $\frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial^m x \partial^n y}$.

4. Конкретни програмни реализации

Пример 4.1 Дадена е функцията $f(x, y) = x^3 e^y$. Да се пресметнат частните производни до втори ред.

```
Clear[f]
f[x_, y_] := x^3 Exp[y];
Print["f(P)=", f[x, y]];
Print["fx(P)=", D[f[x, y], x],
      "    fy(P)=", D[f[x, y], y]];
Print["fxx(P)=", D[f[x, y], x, x],
      "    fxy(P)=", D[f[x, y], x, y]];
Print["fyx(P)=", D[f[x, y], y, x],
      "    fyy(P)=", D[f[x, y], y, y]];
```

$$f(P) = e^y x^3$$

$$f_x(P) = 3 e^y x^2 \quad f_y(P) = e^y x^3$$

$$f_{xx}(P) = 6 e^y x \quad f_{xy}(P) = 3 e^y x^2$$

$$f_{yx}(P) = 3 e^y x^2 \quad f_{yy}(P) = e^y x^3$$

Пример 4.2 Нека $f(x)$ е непрекъсната диференцируема функция и

$$F(x, y) = \int_x^y f(t) dt.$$

Да се пресметнат частните производни до втори ред на функцията $F(x, y)$. Тук трябва да си припомним изучения вече въпрос за интеграли с променливи граници. Когато пресмятаме производната по x считаме долната граница на интеграла за променлива, а горната граница за константа

$$F_x(P) = \frac{\partial}{\partial x} \int_x^y f(t) dt = -f(x).$$

Ако диференцираме по променливата y ролите са разменени. Горната граница в този случай е променлива, а долната константа

$$F_y(P) = \frac{\partial}{\partial y} \int_x^y f(t) dt = f(y).$$

Продължавайки по този начин имаме

$$F_{xx}(P) = \frac{\partial}{\partial x} (-f(x)) = -f'(x), \quad F_{xy}(P) = \frac{\partial}{\partial y} (-f(x)) = 0,$$

$$F_{yy}(P) = \frac{\partial}{\partial y} (f(y)) = f'(y), \quad F_{yx}(P) = \frac{\partial}{\partial x} (f(y)) = 0.$$

Да извършим тези пресмятания с помощта на компютър.

In[49] :=

```
Clear[F];
F[x_, y_] := Integrate[f[t], {t, x, y}];
Print["F(P)=", F[x, y]];
Print["Fx(P)=", D[F[x, y], x],
      "    Fy(P)=", D[F[x, y], y]];
Print["Fxx(P)=", D[F[x, y], x, x],
      "    Fxy(P)=", D[F[x, y], x, y]];
Print["Fyx(P)=", D[F[x, y], y, x],
      "    Fyy(P)=", D[F[x, y], y, y]];
```

$$F(P) = \int_x^y f[t] \, dt$$

$$F_x(P) = -f[x] \quad F_y(P) = f[y]$$

$$F_{xx}(P) = -f'[x] \quad F_{xy}(P) = 0$$

$$F_{yx}(P) = 0 \quad F_{yy}(P) = f'[y]$$

Пример 4.3 Да разгледаме функция $f(x, y)$, която се дефинира с крайни суми

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x^i \sin \frac{y}{j}.$$

Нашата цел в този пример ще бъде да диференцираме функцията $f(x, y)$ с помощта на компютърна програма. Диференцирането ще извършим за произволни естествени стойности на n . Преди да преминем към програмиране ще покажем как се разписва сумата при конкретна стойност на n . Нека $n = 3$
Тогава

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i x^i \sin \frac{y}{j} = \sum_{i=1}^3 x^i \sum_{j=1}^i \sin \frac{y}{j} \\ &= x \sum_{j=1}^1 \sin \frac{y}{j} + x^2 \sum_{j=1}^2 \sin \frac{y}{j} + x^3 \sum_{j=1}^3 \sin \frac{y}{j} \\ &= x \sin y + x^2 \left(\sin y + \sin \frac{y}{2} \right) + x^3 \left(\sin y + \sin \frac{y}{2} + \sin \frac{y}{3} \right) \\ &= (x + x^2 + x^3) \sin y + (x^2 + x^3) \sin \frac{y}{2} + x^3 \sin \frac{y}{3}. \end{aligned}$$

В програмата представяме функцията $f(x, y)$ чрез оператора *Sum*.

```
In[1]:= Clear[f, n];
f[x_, y_] := Sum[x^i Sin[y / j], {i, 1, n}, {j, 1, i}];
Print["f(P)=", f[x, y]];
Print["f_x(P)=", D[f[x, y], x],
      " f_y(P)=", D[f[x, y], y]];
Print["f_xx(P)=", D[f[x, y], x, x],
      " f_xy(P)=", D[f[x, y], x, y]];
Print["f_yx(P)=", D[f[x, y], y, x],
      " f_yy(P)=", D[f[x, y], y, y]];
```

$$f(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x^i \sin \left[\frac{y}{j} \right]$$

$$f_x(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i i x^{-1+i} \sin \left[\frac{y}{j} \right] \quad f_y(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{x^i \cos \left[\frac{y}{j} \right]}{j}$$

$$f_{xx}(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (-1+i) i x^{-2+i} \sin \left[\frac{y}{j} \right] \quad f_{xy}(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{i x^{-1+i} \cos \left[\frac{y}{j} \right]}{j}$$

$$f_{yx}(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{i x^{-1+i} \cos \left[\frac{y}{j} \right]}{j} \quad f_{yy}(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i - \frac{x^i \sin \left[\frac{y}{j} \right]}{j^2}$$

5. Задачи за изпълнение

5.1 Пресметнете частните производни до втори ред на следните функции

5.1.1 $f(P) = x^3 \ln y$

5.1.2 $f(P) = (x^2 + y^2) \sin y$

5.2 Извършете проверка на получените резултати чрез компютърна програма.