

# СПЕКТРАЛЕН АНАЛИЗ НА СИГНАЛИ

## 4.1. Широчина на честотен спектър на периодичен и непериодичен сигнал

От математиката е известно, че периодична функция (сигнал) е такава функция за която важи равенството:

$$y = f(t) = f(t \pm kT) \quad , \quad (4.1)$$

където  $t$  е времето,  $T$  е периодът на повторение на стойностите на функцията,  $k = 1; 2; 3; 4; \dots$

Един от показателите, които характеризират един периодичен сигнал е широчината на неговия спектър.

От теоритичните основи на електротехниката е известно, че за определянето на този спектър се използва редът на Фурие (Fourier). Смисълът на този ред се състои в това, че всяка *периодична функция  $S(t)$  отговаряща на условията на Дирихле, може да се представи като сума от хармонични колебания с честоти, и фазови ъгли кратни на основната честота, съответно с амплитуди  $C_n$  и начални фази  $\varphi_n$ .*

Ще припомним, че чистото хармонично трептение се нарича още и “монохармонично”, което според възприетата в оптиката терминология означава, че спектърът на това трептение има само една единствена спектрална линия. Във връзка с това трябва да се подчертае, че в природата няма чисто монохармонично трептение, защото всеки реален сигнал има начало и край. Следователно всеки сложен периодичен сигнал, т. е. *чиято форма се различава от монохармоничния сигнал* може да се разложи във вид на сума от хармонични трептения, честотите на които са кратни на основната честота  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ . От това следва, че един сложен сигнал може да

се характеризира със своята *спектрална (честотна) характеристика*, наричана още и *спектрална функция*. Именно тя съдържа информация за амплитудите и началните фази на отделните трептения. Ако се познават тези две характеристики на даден периодичен сигнал могат да се определят изискванията на които трябва да отговаря даден комуникационен канал за връзка.

Разновидностите на реда на Фурие са следните:

*Пълна тригонометрична форма*

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t). \quad (4.2)$$

Коефициентите  $a_n$  и  $b_n$  се изчисляват с помощта на следните формули

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos n\omega_0 t dt ; \quad (4.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \sin n\omega_0 t dt ; \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) dt .$$

*Кратка тригонометрична форма*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos (n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (4.4)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = - \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$$

*Комплексна форма*

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{j\omega_0 t}, \quad (4.5)$$

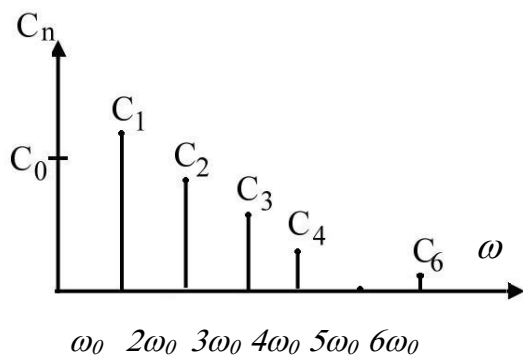
където

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.6)$$

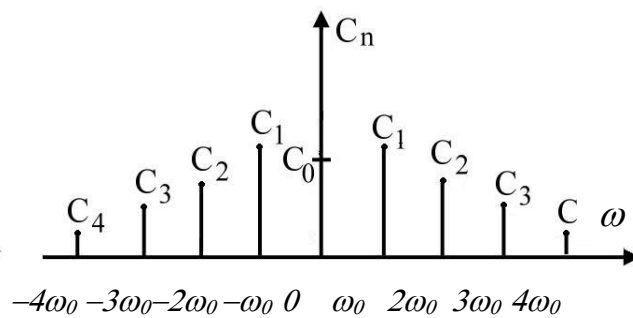
Графически спектъра, съгласно 4.2 и 4.3 както вече се спомена се представя с помощта на *спектрални линии* (фиг. 4.1). Такъв спектър се нарича *линеен*. В общия случай сумите в 4.2 и 4.3 представляват безкраен ред. Тъй като 90-95% от енергията на сигнала се съдържа в първите няколко събираеми, то за нуждите на практиката само те имат практически смисъл. По такъв начин сигналът практически се представя като *функции с ограничен спектър*.

Интервалът от честотната скала, в който се намира ограничения спектър се нарича *широчина на спектъра*.

Ограничаването на спектъра в електронната и комуникационната техника се провежда съзнателно поради ограничената пропускателна възможност на апаратурата, свързочната линия и човешките органи за осезание.



фиг. 4.1



фиг. 4.2

Фазово-честотната спектрална диаграма се построява, като от същите точки на честотната ос се чертаят отсечки, пропорционални на фазата  $\varphi_n$  на съответния хармоник.

Хармоничните, изчислени съгласно (4.5), се получават както с положителни, така и с отрицателни честоти (фиг. 4.2).

Отрицателните честоти нямат физически смисъл. В случая се използва едно формално представяне на реална величина чрез комплексно число.

За да се установи в коя част на спектъра на сигнала е съсредоточена енергията се прави оценка чрез разглеждане на средната мощност за един периодичен сигнал. Тя се определя като *активна мощност* на сигнала, отделена в резистор със стойност  $1\Omega$ :

$$P = \overline{S^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S^2(t) dt \quad (4.7)$$

Ако в 4.6 се замени 4.4 се получава

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n_0 t + \varphi_n) \right]^2 dt.$$

Очевидно е, че всички интервали, които имат за под интегрална функция косинус, се превръщат в нули, поради което средната мощност е

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \quad (4.8)$$

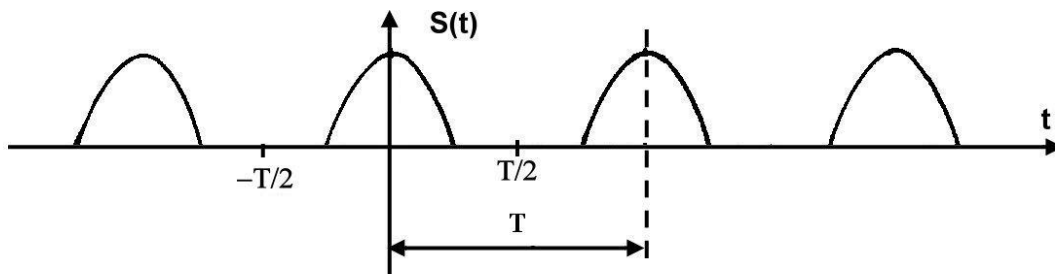
Изразът 4.8 се нарича *равенство на Пърсивал*. От него се вижда, че средната мощност на периодичния сигнал е равна на сумата от средните мощности на всички хармонични съставки и мощността на постоянната съставка. Тя не зависи от началните фази на съставките.

Спектралният анализ на *непериодични* сигнали може да се разгледа като продължение на представянето на периодични сигнали чрез тригонометричен ред на Фурие. На фиг.4.3 е показана графиката

на периодична функция във вид на последователни еднакви импулси с произволна форма, представени чрез функцията

$$S(t) = S(t - kT) ,$$

където  $k$  е цяло число. Тази функция може да се представи чрез комплексна форма на реда на Фурие (вж. Ф-ли 4.5 и 4.6).



фиг. 4.3

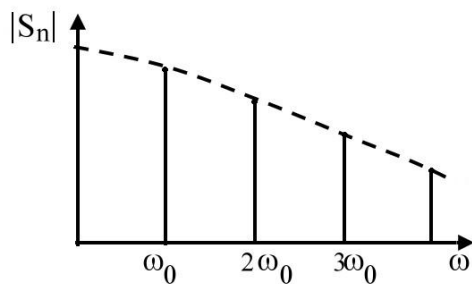
Нека вместо амплитудата  $\dot{C}_n$  се разгледа произведението

$$S_n = \dot{C}_n T = \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-j\omega_0 t} dt \quad (4.9)$$

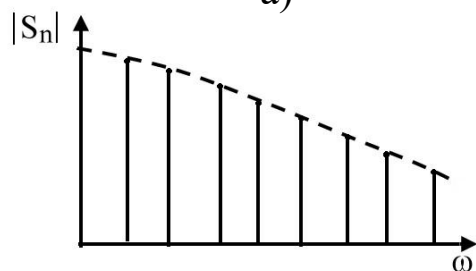
Спектърът на функцията е линеен и е показан на фиг. 4.4а. Той е построен по мащаба на  $|S_n|$ , а не на  $|\dot{C}_n|$  по ординатната ос. Разстоянието между спектралните линии по абцисната ос е  $\omega_0 = 2\pi/T$

Нека допуснем, че периодът  $T$  расте. Тогава разстоянието между спектралните линии ще намалее. Така например, ако периода се увеличи два пъти, то броят на линиите ще се удвои, тъй като първоначалните линии на спектъра запазват своята големина и местоположение, а между тях се появяват нови (фиг. 4.4 б).

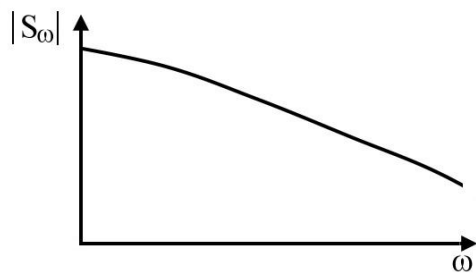
Тъй като  $S_n = \dot{C}_n T$ , за някаква честота  $\omega = n\omega_0$ , произведението ще остане неизменно, тъй като амплитудите  $C_n$  намаляват с увеличаването на периода  $T$ .



а)



б)



в)

фиг. 4.4

Ако увеличаването на периода  $T$  продължи, то линейния спектър ще става с все по-голяма гъстота. При  $T \rightarrow \infty$  интервала между линиите ще се стреми към нула и съвкупността от дискретни точки с координати  $|S_n, n\omega_0|$  ще се превърне в непрекъсната последователност от точки, т.е. в линия, която ще представлява непрекъсната функция на честотата, която ще обозначим със  $S(\omega)$  (фиг. 4.4в). По такъв начин при  $T \rightarrow \infty$  се преминава в границите от периодична функция към неперидична.

Изразявайки амплитудата  $\dot{C}_n$  като

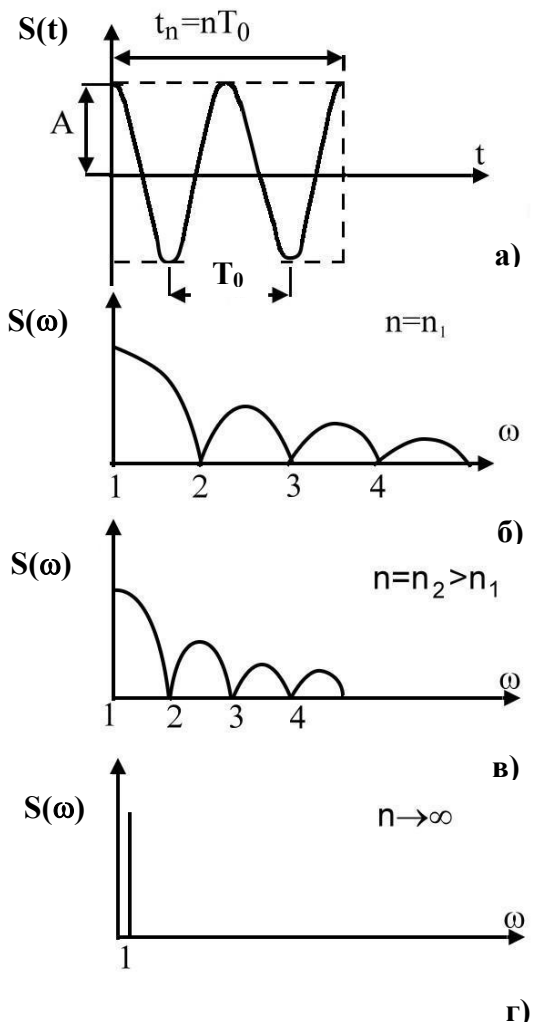
$$\dot{C}_n = \frac{S_n}{T} = \frac{1}{2\pi} S_n \omega_0$$

и като се има в предвид че, при  $T \rightarrow \infty$  величината  $\omega_0$ ,

представляваща разстоянието между спектралните линии се превръща в  $d\omega$ , а  $S_n$  преминава в непрекъсната функция  $\dot{S}(\omega)$ , то заменяйки в 4.5 операцията сумиране с интегриране се получава

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega_0 t} d\omega \quad (4.10)$$

Горната формула се нарича интеграл на Фурие или още *обратно преобразуване на Фурие*. Чрез него е възможно всяка неперидична функция да се представи във вид на безкрайна сума от хармонични съставлящи с безкрайно малки амплитуди  $S(\omega)d\omega$  и безкрайно малки интервали  $d\omega$  между съставлящите.



фиг. 4.5

Що се отнася до функцията от 4.10, тя представлява *спектралната плътност* (или *спектралната функция*) на комплексните амплитуди. Тя може да се определи от 4.9, където вместо дискретните стойности на честотата  $n\omega_0$  може да се въведе непрекъснато изменящата се (текуща) честота  $\omega$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.11)$$

Формула 4.11 се нарича *право преобразуване на Фурие*. Тя позволява да се намери *спектралната плътност*  $\dot{S}(\omega)$  по зададена големина на  $S(t)$ . По такъв начин може да се определи необходимата широчина на честотната лента на канала за връзка.

Ако е известна *спектралната функция* на сигнала  $\dot{S}(\omega)$ , може да се определи *сигналят* като функция на времето  $S(t)$  (ф-ла 4.10). Така например, по *спектъра* на сигнала, след преминаването му през някаква електронна верига, се вижда каква е формата му; това е особено важно за *импулсните сигнали*, използвани в телеграфията, *цифровите схеми*, *радиолокацията* и другаде.

Не е трудно да се направи извода, че *сигнал с крайна продължителност има безкраен спектър, а неограниченият по продължителност сигнал има ограничен спектър*.

За илюстрация на гореказаното на фиг. 4.5 а) е показан *радиоимпулс с правоъгълна обвивка с продължителност  $t_n$ , запълнен с монохроматично трептение  $S(t) = \cos \omega t$  с период  $T_0$* . От графиката се вижда, че *широчината на спектралната функция зависи от продължителността на радиоимпулса  $t_n$ , изразена чрез периода, т.е.  $t_n = nT_0$* . На фиг. 4.5 б) е показан *спектърът при някаква сравнително*

малка стойност на  $n=n_1$ , на фиг. 4.5 в) при  $n_2>n_1$ . Вижда се, че когато импулсът е с безкрайно голяма продължителност ( $t_n \rightarrow \infty$ ), спектърът е съставен от една единствена съставка с честота  $\omega_0$  – честотата на запълване. Очевидно е, че спектърът зависи от продължителността на сигнала.

Спектърът при крайна продължителност на сигнала ( $t_n < \infty$ ) се нарича *текущ*. От примера се вижда, че текущия спектър има голямо практическо приложение.

## 4.2. Въздействие на детерминирани сигнали върху нелинейни безинерционни елементи

От теоретичната електротехника е известно, че особеност на линейните вериги се явява приложимостта при тях на принципа на суперпозицията. От този принцип произтича простото и важно следствие: *хармоничен сигнал, преминавайки през линейна стационарна верига, остава неизменен по форма*, като се променя само неговата амплитуда и начална фаза.

Много по-големи възможности в това отношение притежават нелинейните вериги, характеризиращи се с това, че в тях връзката между входния сигнал  $S_{ex}(t)$  и изходната реакция  $S_{изх}(t)$  е установена чрез нелинейната функционална зависимост:

$$S_{изх}(t) = f[S_{ex}(t)] \quad (4.12)$$

Зависимостта 4.12 се описва с нелинейни алгебрични, диференциални и интегродиференциални уравнения. *Нелинейните вериги променят спектъра на сигнала, като в реакцията се появяват нови спектрални съставки. За тях не важи принципа на суперпозицията.* Използват се в комуникациите и електрониката за реализиране на такива процеси, като модулация, демодулация, генериране на трептения, преобразуване на честотата, изправяне на променливия ток и др.

Друг клас вериги са *параметричните*. Те се отличават по това, че съдържат елементи, които зависят от някакъв параметър и по този начин се описват с параметрични уравнения. *Параметричните вериги променят спектъра на сигнала, но за тях не важи принципа на суперпозицията.*

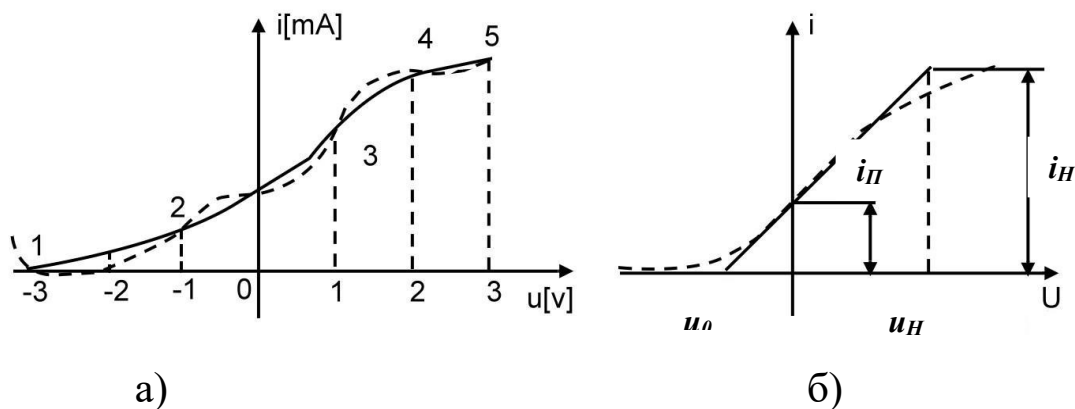
Съпротивлението на нелинейните елементи зависи от стойността на тока и напрежението. Тяхното най-общо математическо описание е волт-амперната характеристика  $i=f(u)$ . Тя обикновено се апроксимира

с някаква функция, за да може да се извърши анализ или синтез на верига със съответно предназначение.

Ще припомним, че апроксимацията е процес на замяна на експериментално снета волт – амперна характеристика с подходяща математическа функция. Една от най-разпространените апроксимиращи функции се явява тази със степенен полином

$$i = f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_k u^k \quad (4.13)$$

който може да се използва по условие за съвпадане в  $k+1$  точки със съответните стойности на зададена волтамперна характеристика. На фиг. 4.6, с прекъсвана линия, е показан възможния ход на апроксимиращата функция за пет предварително избрани точки.



фиг. 4.6

Често пъти апроксимиращата функция се съставя по участъци с отрезки от прави линии, които повече или по-малко съвпадат с характеристиката на нелинейния елемент. Този метод се нарича апроксимация с *отрезки от прави линии*. Например, при необходимост да се представи характеристиката от фиг. 4.6 б) (с прекъсвана линия) се използват три отрезка от прави линии, като всеки отрез се задава с отделен израз:

$$i = \begin{cases} 0 & ; & u < u_0 \\ a_0 + a_1 u & ; & u_0 < u < u_H \\ i_H & ; & u > u_H \end{cases} , \quad (4.14)$$

където  $u_0$  е напрежението на отсечката или запушване,  $u_H$  - напрежението на насищане,  $i_H$  - ток на насищане, а  $i_П$  - ток на покой.

Възможни са и други начини за апроксимация: например чрез експоненциален полином, трансцедентни функции, хиперболически тангенс и т.н.



Нелинейните елементи могат да се разделят условно на *безинерционни* и *инерционни*. Вторият вид се характеризира с това, че съпротивлението им съдържа реактивна съставка.

При разглеждане въздействието на детерминирани сигнали върху нелинейни безинерционни елементи ще допуснем, че входния сигнал е функция на времето  $S_{ex}=S_{ex}(t)$  и характеристиката на нелинейния елемент свързва изходния и входния сигнал чрез 4.12.

Един от случаите, срещани често в практиката е този, при който входния сигнал е *хармонично напрежение* от вида

$$u(t) = U_m \cos \omega t \quad , \quad (4.15)$$

като за простота е приета начална фаза  $\varphi = 0$ .

Нека волт-амперната характеристика се апроксимира с полином от втора степен

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 \quad (4.16)$$

След заместване на 4.15 в 4.16 се получава

$$i = a_0 + a_1 U_m \cos t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t \quad (4.17)$$

Изразът 4.17 се преработва, като се вземе под внимание тригонометричната зависимост

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \alpha$$

Целесъобразно е, освен това, да се извърши групиране на членовете по отношение на  $\omega t$  и  $2\omega t$ . Тогава

$$i = a_0 + \frac{a_2 U_m^2}{2} + a_1 U_m \cos \omega t + \frac{a_2 U_m^2}{2} \cos 2 \omega t \quad . \quad (4.18)$$

От 4.18 се вижда, че изходният ток (реакцията) съдържа една постоянна съставка, втора съставка - с честотата на въздействащото напрежение и трета-с честота, два пъти по-голяма от тази на въздействащото напрежение, т.е. появяват се съставки, които не са се съдържали във входния сигнал. Това е съпроводено с *изкривяване* на сигнала, което може да има сериозни негативни последици, т.е. невярно предаване на информация. Този вид изкривявания се наричат *нелинейни*. От друга страна, чрез допълнително филтриране, могат да се определят постоянната съставка или съставката с двойно по-голяма честота, които да послужат за определени практически цели.

По аналогичен начин може да се установи, че спектърът ще се промени, като се появят и други хармонични съставки, ако полиномът е от по-висока степен.

Друг интересен случай е когато върху нелинейния безинерционен елемент се въздейства с *бихармонично колебание*. Ако входното напрежение е от вида

$$u(t) = U_{1m} \cos \omega_1 t + U_{2m} \cos \omega_2 t \quad (4.19)$$

и ако волт-амперната характеристика се описва с полином от вида 4.16, като се има напредвид 4.19, се получава:

$$i = a_0 + a_1 U_{1m} \cos \omega_1 t + a_1 U_{2m} \cos \omega_2 t + a_2 U_{1m}^2 \cos^2 \omega_1 t + \\ + a_2 U_{2m}^2 \cos^2 \omega_2 t + 2a_2 U_{1m} U_{2m} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \quad (4.20)$$

За преобразуване на последното събираемо, в дясната част на 4.20, трябва да се вземе под внимание зависимостта

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)] .$$

Установява се, че токът, (реакцията) в този случай съдържа освен постоянна съставка, но и спектрални съставки със следните честоти:

$$\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2$$

Последните две честоти се наричат *комбинационни*. Те също внасят нелинейни изкривявания на сигнала, но могат да се използват за *преобразуване на честотата*.

В общия случай се вижда, че изходния сигнал съдържа освен хармонични от вида  $n\omega_1$  и  $m\omega_2$ , където  $n$  и  $m$  са цели числа, още и съставки с честоти от вида  $n\omega_1 \pm m\omega_2$ . Числото  $p = |n| + |m|$  се нарича *порядък на комбинационните колебания*. Тези колебания могат да бъдат *сумарни и разликови*. Така например, комбинационното колебание  $(\omega_1 - \omega_2)$  е разликово от втори порядък, а колебанието  $(3\omega_1 + 2\omega_2)$  – сумарно от пети порядък.

Не е трудно да се установи, че законът по който се изменят комбинационните колебания, по *същия закон ще се променят и фазовите съотношения* на отделните съставки.

В зависимост от това, кое колебание се явява полезно в качеството на филтър се използва или паралелен колебателен  $LC$  кръг, (за високи честоти), или апериодично  $RC$  звено (за отделяне на постоянната съставляща или колебания с ниска честота).

Определянето на състава на преобразувания сигнал, съдържащ само хармонични (при монохармонично въздействие), се нарича *хармоничен анализ*, а сигналът, състоящ се от хармонични и комбинационни колебания (при полихармонично въздействие) - *спектрален анализ*. Хармоничният анализ представлява частен случай на спектралния анализ.