

Висша математика

втора част

Лабораторно упражнение

Диференциал, градиент и Хесиан

14.04.2020

1. Дефиниция на градиент на функция на две променливи

Функция на две променливи се дефинира чрез

$$f[x_, y_] := \text{Аналитичен израз на функцията.}$$

Пример 1.1

$$f[x_, y_] := x^2 + 3y^3;$$

Програмния език Mathematica разполага с вградена функция за пресмятане на градиента $\nabla f(P)$, която се дефинира по следния начин

$$\text{Grad}[f[x, y], \{x, y\}];$$

2. Дефиниция на Хесиан

Нека $f(P)$ е два пъти диференцируема функция в някаква област Ω . Хесианът

$$H : f \rightarrow \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \Leftrightarrow Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

дефинираме със средства на езика Mathematica по следния начин

$$H[f_] := \{\{D[f[x, y], x, x], D[f[x, y], x, y]\}, \\ \{D[f[x, y], y, x], D[f[x, y], y, y]\}\};$$

Обърнете внимание, че когато се изпълнява $H[f]$ функцията f може все още да няма дефиниция.

Пример 2.1 Тук е разпечатан $H[f]$ без f да е дефинирана.

$$\begin{pmatrix} f^{(2,0)}[x, y] & f^{(1,1)}[x, y] \\ f^{(1,1)}[x, y] & f^{(0,2)}[x, y] \end{pmatrix}$$

3. Дефиниция на диференциал

За да дефинираме първия и втория диференциал със средства на езика

Mathematica се нуждаем от вектора $dP = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$, който има координати равни на

диференциалите на аргументите. Тогава

$$df = \nabla f(P) dP \text{ и } d^2 f = (dP)^T Hf(P) dP.$$

Да изградим тези оператори в Mathematica. За първия диференциал имаме:

$$dP := \{dx, dy\};$$

$$d[f_] := \text{Grad}[f[x, y], \{x, y\}] \cdot dP;$$

$$d[f]$$

Аналогично за втория диференциал:

$$dP := \{dx, dy\};$$

$$H[f_] := \{\{D[f[x, y], x, x], D[f[x, y], x, y]\}, \\ \{D[f[x, y], y, x], D[f[x, y], y, y]\}\};$$

$$dd[f_] := \{dx, dy\} \cdot H[f] \cdot \{dx, dy\};$$

$$\text{Expand}[dd[f]]$$

4. Конкретни програмни реализации

Пример 4.1 Дадена е функцията $f(x, y) = x^5 \ln y$. Да се пресметнат частните производни до втори ред, градиента, Хесиана, първия и втория диференциал.

Градиент, Хесиан,

Първи диференциал, Втори диференциал

```
Clear[f];
(* Дефиниция на функцията f(p) *)
f[x_, y_] := x^5 Log[y];
(* За градиента използваме вградена функция Grad[f[x,y],{x,y}] *)
(* Дефиниция на Хесиана *)
H[f_] := {{D[f[x, y], x, x], D[f[x, y], x, y]},
           {D[f[x, y], y, x], D[f[x, y], y, y]}};
(* Дефиниция на вектора диференциал *)
dP := {dx, dy};
(* Дефиниция на първия диференциал *)
d[f_] := Grad[f[x, y], {x, y}] . dP;
(* Дефиниция на втория диференциал *)
dd[f_] := Expand[{dx, dy} . H[f] . {dx, dy}]
(* Блок за отпечатване на резултатите *)
Print["∇f=", Grad[f[x, y], {x, y}]];
Print["Hf=", MatrixForm[H[f]]];
Print["df=", d[f]];
Print["d²f=", Factor[dd[f]]];
∇f = {5 x⁴ Log[y], x/y}
```

$$Hf = \begin{pmatrix} 20 x^3 \text{Log}[y] & \frac{5 x^4}{y} \\ \frac{5 x^4}{y} & -\frac{x^5}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$df = \frac{dy x^5}{y} + 5 dx x^4 \text{Log}[y]$$

$$d^2f = -\frac{x^3 (dy^2 x^2 - 10 dx dy x y - 20 dx^2 y^2 \text{Log}[y])}{y^2}$$

5. Задачи за изпълнение

5.1 Нека $f(P)$, $P(x, y, z)$ е функция на три променливи. Напишете програма, която пресмята градиента, Хесиана, първия и втория диференциал. Използвайте функцията $xy \sin z$ за конкретна дефиниция на $f(P)$.

5.2 Нека $f(P)$, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е функция на n променливи. Напишете програма, която пресмята градиента, Хесиана, първия и втория диференциал. Използвайте функцията $x_1 x_2 \dots x_{n-1} \sin x_n$ за конкретна дефиниция на $f(P)$. Изпълнете програмата при $n = 4$.