4.3. Основни методи за спектрален анализ на преобразуваните сигнали в нелинейна безнерционна верига

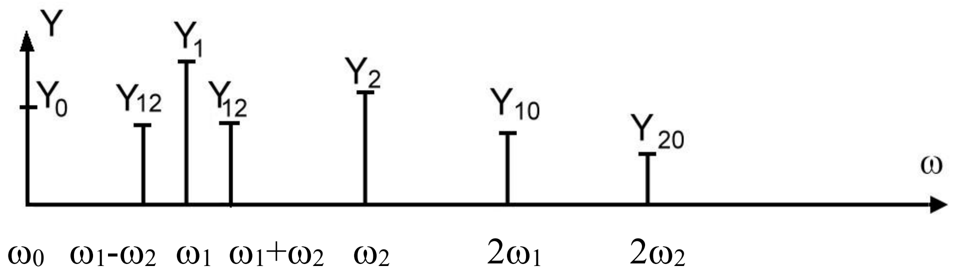
При изследването на безинерционните вериги може да не се отчита крайната дължина на реалните сигнали, тъй като преходни процеси в такива вериги не възникват. Основните методи за спектрален анализ на преобразуваните сигнали са следните:

А/ Метод за спектрален анализ основан на използване на тригонометрични формули

Формулите за кратни дъги и формулите за произведение на синуси и косинуси се използват за хармоничен и спектрален анализ при апроксимация на характеристиката на нелинейните елементи със степенен полином.

В раздел 4.2 бе разгледан пример при въздействие с монохармоничен и бихармоничен сигнал.

Получените резултати не се нуждаят от коментар. Ще допълним само, че спектрите на входния и изходния сигнал е прието да се представят с диаграми, които се наричат *спектрограми*. Спектрограмите не отразяват мащабните съотношения между амплитудите на отделните колебания, като фазите на последните при необходимост могат да се дадат с цифри. За илюстрация, за случая с бихармонично въздействие, на фиг. 4.7 е построена съответната спектрограма въз основа на получените преобразувани честоти.



фиг. 4.7

Б/ Метод за спектрален анализ, основан на използването на фωормулите за три и пет ординати

Формулите за трите и петте ординати се използват главно при графични изчисления, а също и при аналитични, за апроксимиращи функции неподходящи за интегриране.

Формулите за трите ординати позволяват да се намерят приблизително стойностите на постоянната съставяща I_0 и амплитудите на първите две хармонични на анализираното колебание I_2. Този метод е сравнително точен, когато проходната динамична характеристика е много близка до парабола; тъй като в този случай третата и четвъртата хармонични са с много малки амплитуди и могат да бъдат пренебрегнати.

Нека на входа на нелинейния елемент действа косинусоидално напрежение. Характеристиката на нелинейния елемент е показана на фиг. 4.8.

В този случай токът, в общ вид, може да се запише по следния начин:

$$i = I_0 + I_1 \cos 2\omega t + I_2 \cos 2\omega t \qquad (4.21)$$

Върху графиката се фиксирът три ординати за три предварително избрани характерни точки:

i_{max} *при* $\omega t=0$; $u = U$

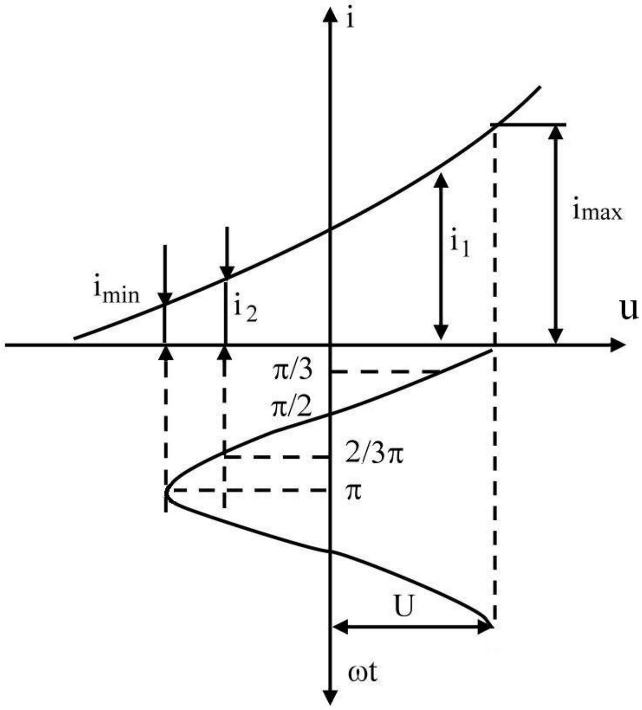
i_n *при* $\omega t=\pi/2$; $u = 0$

i_{min} *при* $\omega t=\pi$; $u = -U$

Замествайки получените стойности в 4.21 се получава система от три уравнения

$$\left| \begin{array}{l} i_{max}=I_0+I_1+I_2 \\ i_n=I_0-I_2 \\ i_{min}=I_0-I_1+I_2 \end{array} \right. \qquad (4.22)$$

Решавайки тази система спрямо I_0, I_1 и I_2 се определят големините на съответните хармонични.



фиг. 4.8

Ако възникне необходимостта за определяне на хармоничните от по-висок порядък се използват формулите за петте ординати. Последните позволяват да се намерят приблизително стойностите на постоянната съставяща и амплитудите на първите четири хармонични. За съставянето на уравненията на петте ординати, освен указаните по-горе стойности, се намират още стойностите на токовете при $\omega t=\pi/3$ и $\omega t=2\pi/3$ (фиг. 4.8.). Токът, в този случай, се представя по следния начин:

$$i = I_0 + I_1 \cos\omega t + I_2 \cos 2\omega t + I_3 \cos 3\omega t + I_4 \cos 4\omega t \qquad (4.23)$$

В съответствие с графиката на фиг. 4.8 се съставя съответната система от уравнения (аналогично на 4.22), от която се определят амплитудите на I_0, I_1, I_2, I_3 и I_4.

Както вече стана ясно, в резултат на нелинейното преобразуване на сигналите, освен полезните продукти винаги се появяват и вредни, които са причина за изкривяване на формата на изходния сигнал. Тези изкривявания се наричат *нелинейни,* като за тяхната оценка се въвежда тъй наречения *коефициент на нелинейни изкривявания к (клир-фактор)*. Той е равен на отношението на средноквадратичната амплитуда на всички висши хармонични отнесени към амплитудата на сигнала, който се приема за полезен:

$$k = \frac{\sqrt{y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + ... + y_n^2}}{y_1} \quad (4.24)$$

Важно е да се отбележи, че коефициента на нелинейни изкривявания расте с увеличаване на амплитудата на входния сигнал.

В/ Метод на ъгъла на отсечка. Този метод се използва, когато волт-амперната характеристика на активния прибор е апроксимирана с отрези от прави линии и същият работи в режим различен от клас А. По тази причина този метод намира приложение при пресмятане на мощни усилватели, генераторни устройства и умножители на честота.

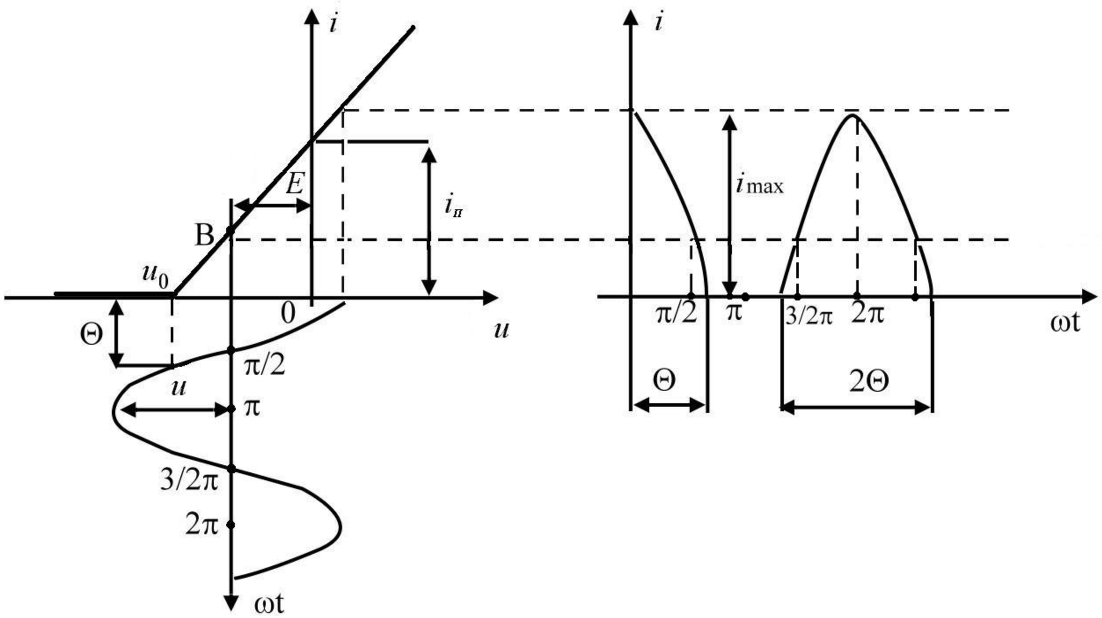
На фиг. 4.9 е дадена апроксимираната волт-амперна характеристика *i=f(u)*. Под нея е показана графиката на хармоничен входен сигнал $U\cos\omega t$ при предварително избрано преднапрежение *E*, т.е.

$$u = E + U\cos\omega t \quad (4.25)$$

Големината на това преднапрежение определя местоположението на работната точка B върху волт-амперната характеристика. За да се получи нелинейно преобразуване на входния сигнал работната точка се избира така, че да се изпълни неравенството

$$u > |\, u_0 - E \,| \quad , \quad (4.26)$$

където u_0 е големината на запушващото напрежение за даден прибор.



фиг. 4.9

В дясно на фиг. 4.9 е показана графиката на изходния периодичен ток. Вижда се, че той протича само през част от периода на косинусоидалния входен сигнал, който съответства на ъгъл 2θ. *Половината от този ъгъл, т.е. θ, изразен в градуси или радиани се нарича ъгъл на отсечката на тока.*

От фиг.4.9 е очевидно, че големината на протичащия изходен ток зависи от ъгъл θ, т.е. от преднапрежението E, напрежението на запушване u_0, амплтудата на изходното напрежение u и стръмността на волт-амперната характеристика на активния прибор S. От вида на тази характеристика графически се определя токът на покой i_n

$$i_n = S \mid u_0 \mid \tag{4.27}$$

Целта на този метод е да се определи големината на амплитудата на хармоничните съдържащи се в изходния периодичен ток, в зависимост от ъгълът на отсечка θ.

От фиг. 4.9 се вижда, че ток в изходната верига протича в интервалите $0 < \omega t < \theta$ и $2\pi - \theta < \omega t < 2\pi$. За тези участъци токът е

$$i = i_n + S\,u \tag{4.28}$$

Замествайки 4.25 в 4.28 се получава

$$i = i_n + S\,E + S\,U \cos\omega t \quad . \tag{4.29}$$

Отчитайки, че при $\omega t = \theta$, $i=0$, може да се изрази изменението на тока $i=f(\theta)$ имайки напредвид 4.29

$$0 = i_n + S\,E + S\,U \cos\theta \tag{4.30}$$

$$i = S\,U\,(\cos\omega t - \cos\theta) \tag{4.31}$$

От 4.30 може да се определи големината на ъгъл θ

$$\cos\theta = -\frac{S\,E + i_n}{S\,U} = -\frac{E - u_0}{U} \tag{4.32}$$

Максималната стойност на изходния ток i_{max} се получава при $\omega t=0$, имайки напредвид общия израз за тока 4.31

$$i_{\max} = S\,U\,(1 - \cos\theta) \tag{4.33}$$

Амплитудите на хармоничните на периодичния ток и постоянната съставка I_0 се определят с помощта на 4.3. Необходимо е да се смени променливата величина t с ωt и границите с $/-\theta\,/$ и $/\theta/$:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} I_{\max}\,\frac{\cos\omega t - \cos\theta}{1-\cos\theta}\,d\omega t = I_{\max}\,\alpha_0\,(\theta) \tag{4.43}$$

$$I_{1m} = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} I_{\max}\,\frac{\cos\omega t - \cos\theta}{1-\cos\theta}\cos\omega t\,d\omega t = I_{\max}\,\alpha_1\,(\theta)$$

$$I_{1n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} I_{\max}\,\frac{\cos\omega t - \cos\theta}{1-\cos\theta}\cos n\,\omega t\,d\omega t = I_{\max}\,\alpha_n\,(\theta),$$

където

$$\alpha_0\ (\theta)=\frac{\sin\theta-\theta\cos\theta}{n\ (1-\cos\theta)};\ \alpha_1\ (\theta)=\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{n\left(1-\cos\theta\right)}$$

$$\alpha_n\ (\theta)=\frac{2\left(\sin n\,\theta\cos\theta-n\cos n\,\theta\sin\theta\right)}{\pi\ n\left(n^2-1\right)\left(1-\cos\theta\right)} \qquad (4.35)$$

Изразите 4.35 се наричат *коефициенти на Берг*. В същност те изразяват нормираните амплитуди на хармоничните и постоянната съставка, т.е.

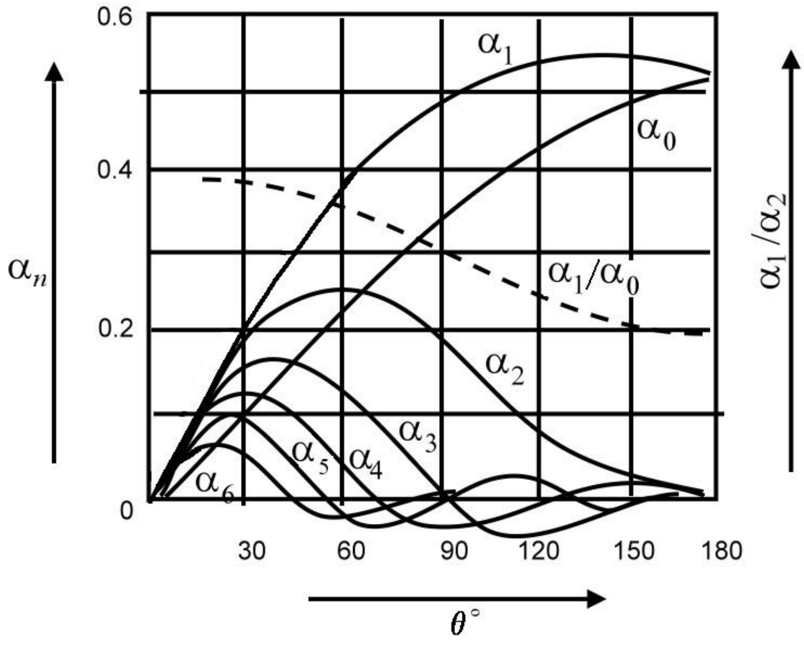
$$\alpha_0\ (\theta)=\frac{I_0}{I_{\max}} \qquad \alpha_1\ (\theta)=\frac{I_{1m}}{I_{\max}} \qquad .... \qquad \alpha_n\ (\theta)=\frac{I_{nm}}{I_{\max}}$$

По този начин амплитудата на хармоничната с номер n може да се определи със съотношението

$$I_{nm}=\alpha_n\ (\theta)\ I_{\max} \qquad (4.36)$$

На фиг. 4.10 са начертани графиките на някои от тези коефициенти. Вижда се, че максималната амплитуда за дадена хармонична може да се получи, ако се подбере подходящ (оптимален) ъгъл

$$\theta_{n\ opt}\approx\frac{120^0}{n} \qquad (4.37)$$



фиг. 4.10

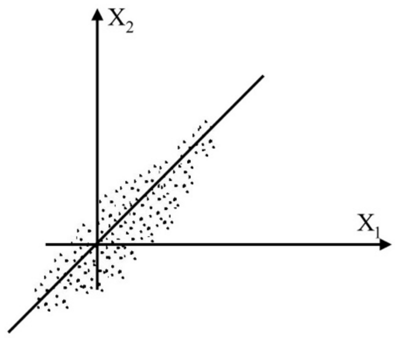
Точните стойности на коефициентите на Берг могат да се намерят от таблици, които често се срещат в специализираната литература.

Последната зависимост е от много голямо значение особено при пресмятането на умножители на честота и усилватели на мощност.

4.4. Корелационен анализ на детерминирани сигнали

Нека да предположим, че се провеждат серия опити, в резултат на които всеки път се наблюдава двумерна случайна величина $\{x_1, x_2\}$. Освен това, нека изходът от всеки опит да се изобразява с точка върху една декартова равнина (фиг. 4.11).

Обикновено се оказва, че средното разположение на изобразяващите точки е по дължината на някаква мислена права, т.е. при всяко отделно изпитание величините x_1 и x_2 имат преди всичко еднакъв знак. Това ни навежда на мисълта за това, че между x_1 и x_2 има статистическа връзка наречена *корелационна*. За функционалната връзка между двете променливи величини x_1 и x_2 е характерно еднозначно съответствие. Известна ли е величината x_1 може да се определи величината x_2 и обратно.



фиг. 4.11

Възможен е и случай на съвършено хаотично разположение на точките върху равнината. Такива величини се наричат *некорелирани*, т.е. между тях няма вероятностна устойчива връзка.

Наред със спектралния метод при описанието на детерминираните сигнали на практика често пъти е необходима характеристика, която да дава представа за някои свойства на сигнала, в частност за скоростта му на изменение във времето, а също така и за продължителността на сигнала без той да се разлага на хармонични съставящи.

В качеството на временна характеристика на сигнала широко се използва понятието *корелационна функция*.

Корелационните функции имат много голямо приложение както при анализа на детерминирани сигнали, така и при анализа на случайни сигнали. Благодарение на тях може да се открие скритата зависимост при изследването на процесите, да се определи степента на влияние между различните параметри и да се решат редица практически задачи.

Нека $S(t)$ да е сумарният сигнал, съставен от два периодични сигнала $S_1(t)$ и $S_2(t)$ с период T. Освен това нека вторият сигнал да е изместен във времето с τ така, че

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t+\tau) \qquad (4.38)$$

Средната мощност за един период е

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[S_1(t) + S_2(t+\tau)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_1^2(t)dt + \\ + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_1(t)S_2(t+\tau)dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_2^2(t+\tau)dt = P_{S1} + 2\psi + P_{S2} \qquad (4.39)$$

В горния израз P_{S1} и P_{S2} са средните мощности за всеки от сигналите, а ψ е *корелационната функция*, т.е.

$$\psi = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_1(t)\, S_2(t+\tau)\, d\, t \qquad (4.40)$$

Когато $\psi = 0$ сигналите $S_1(t)$ и $S_2(t)$ не се проявяват съгласувано във времето. Такива сигнали се наричат *некохерентни*.

Ако $\psi > 0$, $P > P_{S1} + P_{S2}$. В този случай съществува често съвпадение на моментните стойности на сигналите по знак, като средната мощност на сигнала е по-голяма от сумата на мощностите на отделните сигнали.

В случая, когато $\psi < 0$, то $P < P_{S1} + P_{S2}$, което е равносилно на взаимното намаляване мощностите на сигналите.

Експерименталното изследване на корелационните връзки между сигналите се реализира с помощта на специални устройства, които се наричат *корелометри*.

За детерминиран сигнал $S(t)$ с крайна продължителност, корелационната функция подобно на 4.40 може да бъде определена със следния израз:

$$B_S\,(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S\,(t)\,\overset{*}{S}\,(t+\tau)\,d\,t, \qquad (4.41)$$

където τ е големината на дефазирането на сигнала във времето. Когато сигналът се явява реална функция на времето, означението на комплексно-спрегнатия сигнал може да се изпусне:

$$B_S\,(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S\,(t)\,S\,(t+\tau)\,d\,t \qquad (4.42)$$

От израза 4.42 се вижда, че $B_S(\tau)$ характеризира степента на връзка (корелацията) на сигнала $S(t)$ със своето копие, дефазирано с големината τ по оста на времето. Ясно е, че функцията $B_S(\tau)$ достига своя максимум при $\tau=0$, тъй като всеки сигнал е напълно корелиран със самия себе си. При това

$$B_S\,(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S^2\,(t)\,d\,t = E \quad , \qquad (4.43)$$

т.е. максималната стойност на корелационната функция е равна на енергията на сигнала.

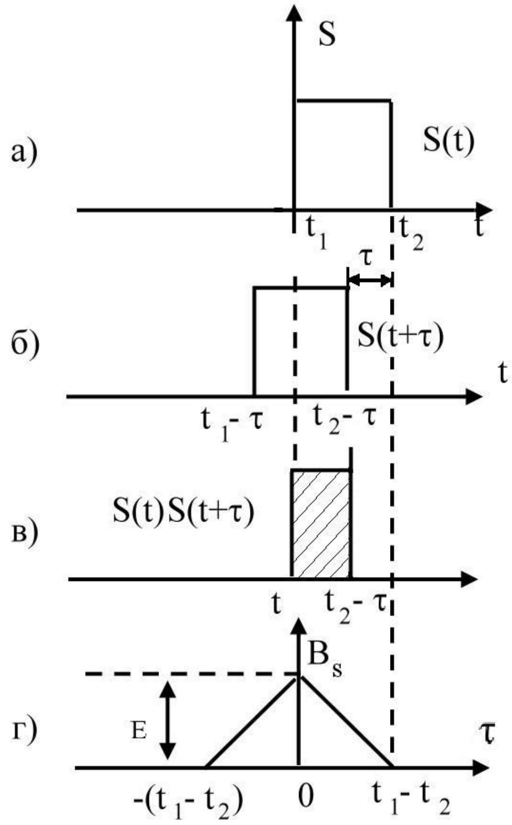
С увеличаването на τ функцията $B_S(\tau)$ намалява, (не винаги обаче монотонно) и при относително дефазиране на сигналите $S(t)$ и $S(t+\tau)$ с големина, превишаваща продължителността на сигнала, се обръща в нула.

На фиг. 4.12 е показано построяването на корелационна функция за прост сигнал във вид на правоъгълен импулс (фиг. 4.12 а). Дефазираният на τ (по посока на изпреварването) сигнал $S(t+\tau)$ е показан на фиг. 4.12 б. Произведението $S(t).S(t+\tau)$ е показано на фиг. 4.12 в. Графиката на функцията $B_S(\tau)$ е показана на фиг. 4.12 г. На всяка стойност на τ съответства определено произведение $S(t).S(t+\tau)$ и площ под графиката на функцията $S(t).S(t+\tau)$. Числените стойности на тези площи, за всяко τ, дават ординатите на функцията.

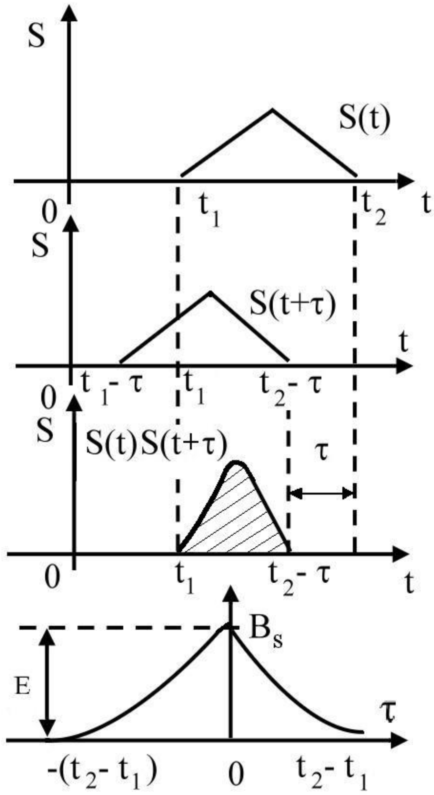
По аналогичен начин е извършено построяването на корелационната функция за триъгълен импулс, показан на фиг. 4.13. От общото определение за корелационната функция, а също и от показаните примери се вижда , че е безразлично дали наляво или надясно, спрямо своето копие, ще е дефиниран сигналът с големината на дефазирането във времето τ. Ето защо изразът 4.42 може да се обобщи по следния начин:

$$B_S\,(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S\,(t)\,S\,(t+\tau)\,d\,t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S\,(t)\,S\,(t-\tau)\,d\,t \qquad (4.42)$$

Това е равносилно на твърдението, че $B_S(\tau)$ се явява *четна функция* на τ



фиг. 4.12



фиг. 4.13

Често пъти в литературата функцията $B_S(\tau)$ се нарича *авто-корелационна функция*, тъй като чрез нея е възможно да се съди за степента на връзка (корелация) между сигнала с неговото дефазирано във времето копие.

За един периодичен сигнал, енергията на който е безкрайно голяма, определението за корелационна функция с помощта на изразите 4.42 и 4.44 не е коректно. В този случай трябва да се изхожда от следните определения:

$$B_{S\,пер}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t)\, S(t+\tau)\, d\,t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t)\, S(t-\tau)\, d\,t \qquad (4.45)$$

При такова определение корелационната функция придобива размерността на мощност като $B_{S\,пер.}(0)$ е равна на средната мощност на периодичния сигнал. Като се има напредвид периодичността на сигнала $S(t)$, който е усреднен чрез произведението $S(t).S(t+\tau)$, или чрез $S(t).S(t-\tau)$ проведено върху безкрайно голям отрязък от времето t, той трябва да съвпада с усреднението за един период T_1. Ето защо изразът 4.45 може да се замени със следния израз:

$$B_{S\,пер}(\tau) = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} S(t)\,S(t+\tau)\,dt = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} S(t)\,S(t-\tau)\,dt \quad (4.46)$$

Влизащите в горния израз интеграли не са нищо друго, а корелационната функция на сигнала в интервала T_1. Обозначавайки я чрез $B_{ST1}(\tau)$ се стига до съотношението

$$B_{S\,пер.}(\tau) = B_{ST1}(\tau)\,/\,T_1 \quad (4.47)$$

От 4.47 следва твърдението, че на периодичен сигнал съответства и периодична корелационна функция $B_{S\,пер.}(\tau)$, като периодът на функцията $B_{S\,пер.}(\tau)$ съвпада с периода T на изходния сигнал $S(t)$. Така например, за прост хармоничен сигнал $S(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \theta_0)$, корелационната функция е:

$$B_{S\,пер.}(\tau) = \frac{A_0^2}{T}\int_{=T/2}^{T/2}\cos(\omega_0\,t+\theta_0)\cos[\omega_0\,(t+\tau)+\theta_0]\,dt = \frac{1}{2}A_0^2\cos\omega_0\,\tau$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1} \quad (4.48)$$

При $\tau=0$, $B_{S\,пер.}(0) = \frac{1}{2}A_0^2$, което представлява средната мощност на хармонично колебание с амплитуда A_0. Важно е да се отбележи, че корелационната функция $B_{S\,пер.}(\tau)$ не зависи от началната фаза на колебанията.

За оценка на степента на връзка между два различни сигнала $S_1(t)$ и $S_2(t)$ се използва *взаимно-корелационната функция*, определена с общия израз:

$$B_{S_1S_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)\,\overset{*}{S}_2(t+\tau)\,dt \quad (4.49)$$

Когато функциите $S_1(t)$ и $S_2(t)$ са реални:

$$B_{S_1S_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)\,S_2(t+\tau)\,dt \quad (4.50)$$

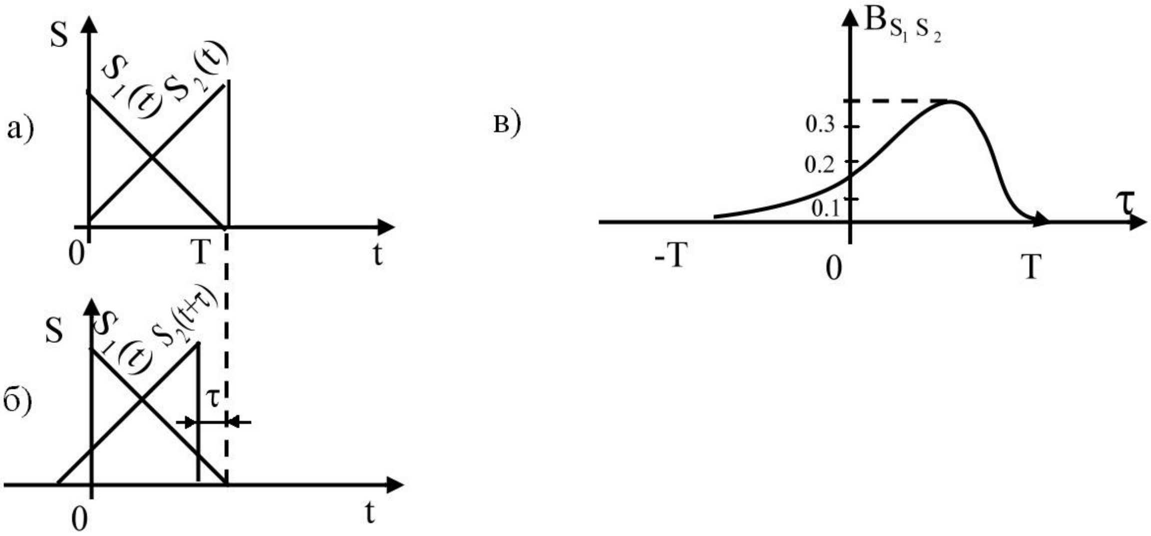
Разгледаната по-горе корелационна функция $B_S(\tau)$ се явява частен случай на функцията $B_{S1\,S2.}(\tau)$, когато $S_1(t) = S_2(t)$.

Построяването на взаимно-корелационната функция на два сигнала $S_1(t)$ и $S_2(t)$ е показано на фиг. 4.14. Изходното положение на сигналите /τ=0/ е показано на фиг. 4.14 а. При дефазиране на сигнала $S_2(t)$ наляво (τ >0, фиг. 4.14 б), корелационната функция отначало нараства, след което намалява до нула при $\tau=T$. При дефазиране надясно /$\tau< 0$/ корелационната функция веднага намалява. В резултат на това тя се получава асиметрична спрямо ординатната ос на функцията $B_{S1,\,S2}$ (фиг. 4.14 в).

Очевидно е, че стойността на $B_{S1,\,S2}$ не се изменя, ако вместо изпреварването на сигнала $S_2(t)$ се даде задръжка на сигнала $S_1(t)$. Ето защо 4.50 може да се обобщи по следния начин:

$$B_{S_1,S_2}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)\; S_2\,(t+\tau)\,d\,t=\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t-\tau)\; S_2\,(t)\,d\,t \qquad (4.51)$$

Трябва обаче да се различават изразите 4.44 и 4.51.



фиг. 4.14

За разлика от $B_S(\tau)$ взаимно-корелационната функция не е задължително да се явява четна спрямо τ. Освен това, взаимно-корелационната функция не е задължително да достига максимум при $\tau=0$. Тези две свойства на функцията $B_{S1S2}(\tau)$ са илюстрирани на фиг. 4.14.