

Висша математика

втора част

Лабораторно упражнение

**Обикновени диференциални уравнения с
отделящи се променливи**

28.04.2020

1. Необходими теоретични знания

1.1 Дайте определение за:

- а) диференциално уравнение;
- б) ред на диференциално уравнение;
- в) решение на диференциално уравнение;
- г) задача на Коши.

1.2 Отговорете на следните въпроси:

- а) Кое диференциално уравнение се нарича обикновено?
- б) Кое диференциално уравнение се нарича частно?
- в) Какво представлява общото решение на едно диференциално уравнение?
- г) Кое решение се нарича частно и кое особено?
- д) Кое диференциално уравнение се нарича нерешено относно производната?

2. Диференциално уравнение с отделящи се променливи

2.1 Какъв е общият вид на едно диференциално уравнение с отделящи се променливи?

2.2 Как се решава обикновено диференциално уравнение с отделящи се променливи?

2.3 При какви условия можем да получим частни или особени решения.

3. Решаване на диференциални уравнения в Mathematica

Диференциални уравнения в езика Mathematica се решават чрез оператора *DSolve*. Ще разгледаме някои примери за употреба на оператора *DSolve*.

Пример 3.1 Програма за решаване на диференциалното уравнение

$$yy' = \sin x \cos x.$$

```
Clear[y];
```

```
Solutions = DSolve[y[x]y'[x] == Sin[x]Cos[x], y[x], x];
```

```
Print["Изход на оператора DSolve = ", Solutions];
```

Изход на оператора DSolve =

$$\{\{y[x] \rightarrow -\sqrt{2C[1] - \cos[x]^2}\}, \{y[x] \rightarrow \sqrt{2C[1] - \cos[x]^2}\}\}$$

Пример 3.2 Програма за решаване на задачата на Коши

$$\begin{cases} yy' = \sin x \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

с нулево начално условие.

```
Clear[y];
```

(* Дифференциалното уравнение и началното условие се задават с помощта на вектор *)

```
Solutions = DSolve[{y[x]y'[x] == Sin[x]Cos[x], y[0] == 0}, y[x], x];
```

```
Print["Изход на оператора DSolve = ", Solutions];
```

Изход на оператора DSolve =

```
{{y[x] -> -sqrt[1 - Cos[x]^2]}, {y[x] -> sqrt[1 - Cos[x]^2]}}
```

Задачата на Коши с нулево начално условие има две решения.

Пример 3.3 Задача на Коши

$$\begin{cases} yy' = \sin x \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

с ненулево начално условие.

```
In[87]= Clear[y];
```

(* Дифференциалното уравнение и началното условие се задават с помощта на вектор *)

```
Solutions = DSolve[{y[x] y'[x] == Cos[x] Sin[x],
```

```
y[0] == 1}, y[x], x];
```

```
Print["Изход на оператора DSolve=",  
Solutions];
```

DSolve: For some branches of the general solution, the given boundary conditions lead to an empty solution.

Изход на оператора DSolve=

```
{{{y[x] -> sqrt[2 - Cos[x]^2]}}}
```

Същата задача на Коши с ненулево начално условие има единствено решение.

Извличане на данни от оператор *DSolve*.

Пример 3.4 Процедурата за извличане на данни от оператор *DSolve* е подобна на вече изучената процедура за извличане на данни от оператор *Solve*. Чрез оператора *Dimensions* определяме колко са на брой решенията на дифференциалното уравнение.

```

Clear[f, y, Sol];
Solutions = DSolve[y[x]y'[x] == Cos[x]Sin[x], y[x], x];
Print["Изход на оператора DSolve = ", Solutions];
n = Dimensions[Solutions][[1]];
Sol := Table[y[x] /. Solutions[[i]], {i, 1, n}];
Print["Вектор на решенията = ", Sol]
Изход на оператора DSolve =
{{y[x] → -√(1 - Cos[x]^2)}, {y[x] → √(1 - Cos[x]^2)}}
Вектор на решенията =
{-√(2C[1] - Cos[x]^2), √(2C[1] - Cos[x]^2)}

```

4. Конкретни програмни реализации

Пример 4.1 Да се реши диференциалното уравнение $yy' = \sin x \cos x$. Решенията да се дефинират, като функции на x .

```

Clear[f, y, y0, i, Sol, Y];
Solutions = DSolve[y[x] y'[x] == Cos[x] Sin[x], y[x], x];
Print["Изход на оператора DSolve=", Solutions];
n = Dimensions[Solutions][[1]];
Sol := Table[y[x] /. Solutions[[i]], {i, 1, n}];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
  Y[i_, x_] := Sol[[i]]];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
  Print["y", i, "(x)=", Y[i, x]]];
Print["Вектор на решенията=", Sol]
Изход на оператора DSolve=
{{y[x] → -√(2C[1] - Cos[x]^2)}, {y[x] → √(2C[1] - Cos[x]^2)}}
y1(x) = -√(2C[1] - Cos[x]^2)
y2(x) = √(2C[1] - Cos[x]^2)
Вектор на решенията = {-√(2C[1] - Cos[x]^2), √(2C[1] - Cos[x]^2)}

```

5. Задачи за изпълнение

Начертайте графиката на решението на следната задача на Коши

$$\begin{cases} y' \ln x = \frac{y}{x} \\ y(e) = 1 \end{cases}$$